

Ör) $A \subseteq \mathbb{R}$, A sonlu bir küme ve $A' = \emptyset$ olduğunu gösteriniz

Cöz: $A = \emptyset$ in $A' = \emptyset$ ($x \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > 0$
 $\underbrace{V_\varepsilon(x) \cap \emptyset}_{\emptyset} = \emptyset$)

$A \neq \emptyset$ A sonlu olan

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ($a_1 < a_2 < \dots < a_n$
 Veriyabiliriz)

$x \in \mathbb{R}$ in $x \notin A'$ olduğunu göstereceğiz

$x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x \in A \\ x \notin A \end{cases}$

$x \in A$ in $x = a_k \in A$



$\varepsilon = \min \{a_k - a_{k-1}, a_{k+1} - a_k\} > 0$
 olarak alalım

$$V_\varepsilon(x) = V_\varepsilon(a_k)$$

$$\underbrace{V_\varepsilon(a_k) \cap A}_{\{a_k\}} = \{a_k\} \Rightarrow x = a_k \notin A'$$

$$x \notin A \text{ in } x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$$



$$\varepsilon = \min \{ |x - a_k| : k=1, \dots, n \} > 0$$

olarak alalım

$$V_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \text{ olur. } \Rightarrow x \notin A'$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Eğer ki } a_k \in A \\ \text{ise} \\ a_k \in V_\varepsilon(x) \text{ olursa} \\ |x - a_k| < \varepsilon \\ \text{veya} \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{c} \text{Diagram showing } x \text{ and } a_k \text{ on a number line with } x-\varepsilon \text{ and } x+\varepsilon \text{ marked.} \\ \text{Diagram showing } x \text{ and } a_k \text{ on a number line with } x-\varepsilon \text{ and } x+\varepsilon \text{ marked.} \end{array} \right)$$

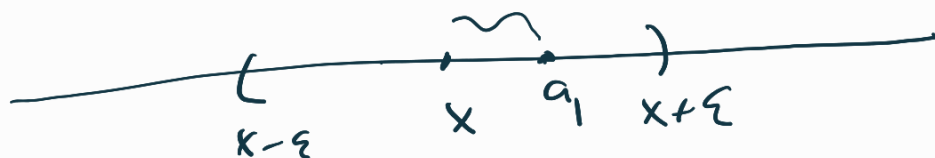
Ö1) $x \in A'$ in x 'in her komşuluğu A kümesinden sonsuz çoklukta eleman içerir

Çözüm) $x \in A'$ olsun her $\varepsilon > 0$ için $V_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ aralığının içinde A kümesinin sonsuz çoklukta eleman olduğunu göstereceğiz.

$x \in A'$ oldigyen $\varepsilon > 0$ van

$$V_\varepsilon(x) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$$

0. halmaz bñ $a \in V_\varepsilon(x) \cap A - \{x\}$ va
 $a_1 \in A$, $a_1 \neq x$ és $a_1 \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

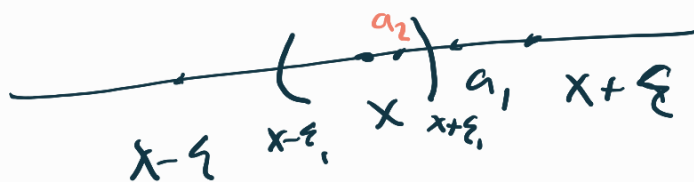


0. halmaz $|a_1 - x| < \varepsilon$ olw.

$$\varepsilon_1 = |a_1 - x| \text{ alakban}$$

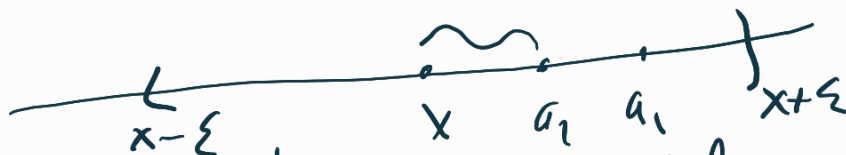
$x \in A'$ oldigyen

$$(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$$



bñ $a_2 \in (x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \cap A - \{x\}$ va.

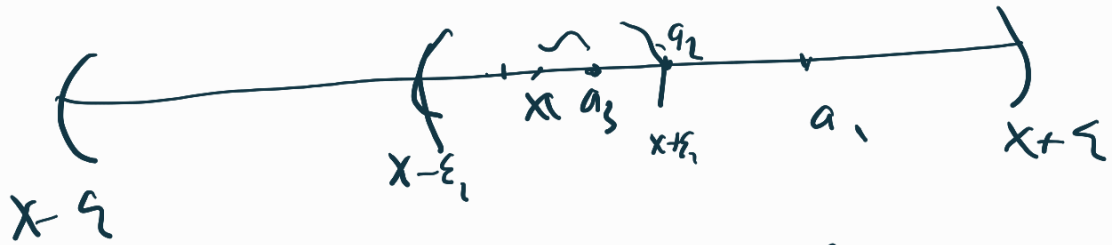
$$a_2 \neq x$$



$$\varepsilon_1 = |a_2 - x| > 0 \text{ okraha alakban}$$

$x \in A'$ olduğundan

$$a_3 \in (x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \cap A - \{x\} \quad \text{vr.}$$



Bu şekilde devam ediliyor

$$a_1, a_2, a_3, \dots \in A \cap V_{\varepsilon}(x) - \{x\}$$

elde edilir

Ö)

$s = \sup A$ ve $s \notin A$ in $s \in A'$
(Benzer şekilde $t = \inf A$ ve $t \notin A$ in $t \in A'$)

Cor:

$s = \sup A$ ve $s \notin A$ olsun

her $\varepsilon > 0$ için $V_{\varepsilon}(s) \cap A - \{s\} \neq \emptyset$
olduğunu göstereceğiz.

$\varepsilon > 0$ olsun

$s = \sup A$ idi

$s - \varepsilon < a \leq s$ o.ş $a \in A$ vardır.

ancak $s \notin A$ olduğundan $s \neq a$ dr.

Dslayışyl

$$s - \varepsilon < a < s < s + \varepsilon$$

$$a \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \cap A - \{s\}$$

$$\Rightarrow s \in A'$$

($t = \inf A$ $\in t \notin A$ $\wedge t \in A'$ olduğunu)
söz gösterin.

Örne:

$A \subseteq B$ in $A' \subseteq B'$ olur.

Kırt:

$A' = \emptyset$ in $A' = \emptyset \subseteq B'$ (yapacak
bir şey
yok)

0 halde $A' \neq \emptyset$ varsayalım.

$x \in A'$ alalım.

$x \in B'$ olduğunu göstereceğiz.

Yeni her $\varepsilon > 0$ için

$\forall \varepsilon (x \cap B - \{x\}) \neq \emptyset$ olduğunu göstereceğiz

$\varepsilon > 0$ verilsin $x \in A'$ olduğunu

$\forall \varepsilon (x \cap A - \{x\}) \neq \emptyset$

$A \subseteq B$ idi Dolayısıyla

$$\emptyset \neq \bigcap_{\varepsilon} (X \cap A - \{x\}) \subseteq \bigcap_{\varepsilon} (X \cap B - \{x\})$$

Dolayısıyla $\bigcap_{\varepsilon} (X \cap B - \{x\}) \neq \emptyset$
 $\Rightarrow \exists x \in B$

Teorem: (Kupaklı Kimelilerin Karakterizasyonu):

$A \subseteq R$ olsun

A kupaklı kimeldir $\iff A' \subseteq A_R$

Kanıt: $(\implies)$ A kupaklı kimelidir

$A = R$ 'in

$A' \subseteq A = R$ (Kupaklı kimeliler için)

$A \neq R$ varsayalım. (yani $R \setminus A \neq \emptyset$ varsayalım)

$$A' \subseteq A \iff A^c = R \setminus A \subseteq (A')^c = R \setminus A'$$

6 halde

$R \setminus A \subseteq R \setminus A'$ olduğu gösterilebilir.

$x \in R \setminus A$ olsun A kupaklı olduğundan

$R \setminus A$ açık kimeldir

$x \in R/A$ ve R/A aada küme olduğundan

$$\underbrace{(x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0)}_{V_{\varepsilon_0}(x)} \subseteq \underline{R/A} \quad \text{o.s. bir } \varepsilon_0 \text{ var}$$

o halde

$$V_{\varepsilon_0}(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow V_{\varepsilon_0}(x) \cap (A - \{x\}) = \emptyset \\ \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow x \in R/A'$$

o halde $R/A \subseteq R/A'$ yani $A' \subseteq A$ elde edilir

($\Leftarrow$) $A' \subseteq A$ olsun A nın kapalı küme yani esdeğer olarak R/A nın aada küme olduğunu göstereceğiz.

$R/A = \emptyset$, $\emptyset$ aada (yapacak bir şey yok)

$R/A \neq \emptyset$ olsun

$x \in R/A$ alalım

$$A' \subseteq A \Rightarrow \underline{R/A} \subseteq R/A'$$

0 halde $\underline{x \in R \setminus A'}$ yani $x \notin A'$

0 halde

$$\underline{V_{\varepsilon_0}(x) \cap A = \{x\}} = \emptyset \quad \text{o.s. b\u00f6 \varepsilon_0 > 0}$$

$$V_{\varepsilon_0}(x) \cap A = \emptyset$$

$$\text{ya da } V_{\varepsilon_0}(x) \cap A = \{x\}$$

ancak $V_{\varepsilon_0}(x) \cap A = \{x\}$ olamaz (zira $x \notin A$)

$$0 \text{ halde } V_{\varepsilon_0}(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow V_{\varepsilon_0}(x) \subseteq R \setminus A$$

D\u00f6\u0131y\u00f6\u0131\u0131\u0131 R \setminus A a\u00e7\u0131k h\u00fcs\u00fcs\u00fcs.

ya da A kapalı h\u00fcs\u00fcs\u00fcs.

ör) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kapalı h\u00fcs\u00fcs\u00fcs de\u011fil
(zira $0 \in A'$ ancak $0 \notin A$)

Teorem (Balzano - Weierstrass Teoremi):

A sınırlı ve sonsuz çoklukta elemanı
sahip bir küre için $A' \neq \emptyset$

Kanıt: $A \subseteq \mathbb{R}$ A sınırlı bir küre
olduğundan A hem üstten hemde alttan
sınırlıdır yani

her $x \in A$ için $x \leq b$ o.s.
bir $b \in \mathbb{R}$ vardır (çünkü A üsttan sınırlıdır)

ve
her $x \in A$ için $a \leq x$ o.s. bir $a \in \mathbb{R}$
vardır (çünkü A alttan sınırlıdır)

Yani her $x \in A$ için $a \leq x \leq b$
olar. Bu başka ifade ile

$A \subseteq [a, b]$ o.s. bir $I = [a, b]$
kapsar ve sınırlı aralıktır.



$$I_1 = [a, b] = \left[a, \frac{a+b}{2} \right] \cup \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$$

$$A \subseteq \left[a, \frac{a+b}{2} \right] \cup \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$$

A sonsuz çoklukta elemana sahip olduğundan
 $\left[a, \frac{a+b}{2} \right], \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$ aralıklarından en az
 biri A içerisinde sonsuz çoklukta eleman

Barındır

I_2 aralığı : A içerisinde sonsuz çoklukta
 eleman varsa aralık olsun

(Eğer her iteşide A içerisinde
 sonsuz çoklukta eleman varsa
 Soldaki aralık al yani $\left[a, \frac{a+b}{2} \right]$
 Sağdaki aralık al yani $\left[\frac{a+b}{2}, b \right]$)

$$I_2 = [a_1, b_1] \text{ diyelim}$$

- i) I_2 aralığının uzunluğu $= l(I_2) = \frac{1}{2} l(I_1) = \frac{b-a}{2}$
 ii) I_2 aralığı A içerisinde sonsuz çoklukta
 eleman içerir.

Şimdi aynı işleri I_2 için yapalım

$$I_1 = [a_1, b_1] = \left[a_1, \frac{b_1 + a_1}{2} \right] \cup \left[\frac{b_1 + a_1}{2}, b_1 \right]$$

Berter şekilde bu aralıklardan en az biri, A kümesinin sonsuz çoklukta elemanını barındırır.

I_3 aralığı bu aralık olsun

(Eğer her ileri aralıktan A kümesinde sonsuz çoklukta eleman geçiyorsa, bu soldaki aralığı alıyoruz)

i) $I_3 \subseteq I_2 \subseteq I_1 = [a, b]$

ii) $l(I_3) = \frac{1}{2} l(I_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{2} \right) = \frac{b-a}{2^2}$

iii) I_3 aralığında A kümesinin sonsuz çoklukta elemanı var

Bu şekilde devam ederseniz

$\dots I_n \subseteq \dots \subseteq I_1 = [a, b]$

ic-ice $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aralıklar dizisi ekle
ediyoruz.

$$I_1 = [a_1, b_1]$$

$$(a_1 = a, b_1 = b)$$

$$I_2 = [a_2, b_2]$$

$$(a_2 = a_1, b_2 = b_1)$$

$\vdots$

$$I_n = [a_n, b_n]$$

$\vdots$

Bu aralıklar 1) özellikleri

1) her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n = [a_n, b_n]$ A kumesinde
Sonsuz çokluğun elemanı olması

$$2) l(I_n) = \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

3) her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n = [a_n, b_n]$ kapalı
ve sınırlı aralıktır.

$$4) \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için } I_{n+1} \subseteq I_n$$

ic-ice aralıklar formu

$$\bigcap I_n \neq \emptyset$$

$$\inf \{l(I_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0 \quad \text{ve} \quad \bigcap I_n = \{x\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{tek} \\ \text{nokta} \\ \text{limit} \end{array} \right)$$

$$\inf \{ \underbrace{L(I_n)}_{\text{oldan gosteren}} : n \in \mathbb{N} \} = \inf \left\{ \frac{b-a}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$$

i) 0 $\underbrace{\left\{ \frac{b-a}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{N} \right\}}$ kümesi bir alt sırası

ii) $\varepsilon > 0$ verilmiş Arşmed prensibinden

$$\frac{\varepsilon}{b-a} > \frac{1}{n_0} \quad \text{ö.z. } n_0 \in \mathbb{N} \text{ var.}$$

Ok yandırı her $n \in \mathbb{N}$ için $2^{n-1} \geq n$
(biner aritmetika gösterilebilir)

0 halde

$$\frac{\varepsilon}{b-a} > \frac{1}{n_0} \geq \frac{1}{2^{n_0-1}} \quad \text{yeni}$$

$$\frac{\varepsilon}{b-a} > \frac{1}{2^{n_0-1}} \Rightarrow \frac{b-a}{2^{n_0-1}} < \varepsilon$$

Dolayısıyla $0 = \inf \left\{ \frac{b-a}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{N} \right\}$ dir

0 halde $I_1, I_2, \dots$ aralıkları teseri geçi

$$\bigcap I_n = \{x\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{tek nokta} \\ \text{kümesi} \end{array} \right) \text{ dir.}$$

İddia: $x \in A'$

$\varepsilon > 0$ verilsin

$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$ olduğunu

göstereceğiz.

$$\varepsilon = \inf \left\{ \frac{b-a}{2^{n-1}} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

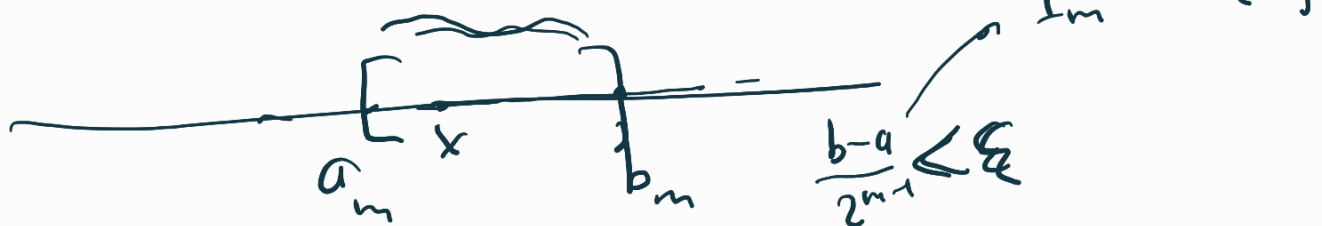
olduğunu göstermiştik.

$$0 < \frac{b-a}{2^{m-1}} < \varepsilon \quad \text{o.ş. } m \in \mathbb{N} \text{ var.}$$

$$I_m = [a_m, b_m] \quad \text{ise } l(I_m) = \frac{b-a}{2^{m-1}}$$

$x \in \bigcap I_n$ idi Döğrüsöyk

$$x \in I_m = [a_m, b_m]$$



$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \supset [a_m, b_m]$$

her bir I_n de A içerisinde en az
bir tane eleman olduğunu $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ aralığı

A linearer Satz charakterisieren von

$$\underbrace{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)} \cap A - \{x\} \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$$