

Tümevarım:

Tümevarım, iyi sıralama aksiyomuna dayanır.

iyi sıralama aksiyomu: Doğal sayılar kümesinin boş kümeden farklı her alt kümesinin bir en küçük elemanı vardır.

$$\left(\begin{array}{l} \emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N} \text{ ise} \\ \text{bir } m \in S \text{ var öyle ki her } x \in S \text{ için} \\ m \leq x \end{array} \right)$$

Teorem: $S \subseteq \mathbb{N}$ olsun.

Eğer

- i) $1 \in S$
- ii) $k \in \mathbb{N}$ ve $k \in S$ iken $k+1 \in S$

koşulları sağlanıyorsa

$$S = \mathbb{N}$$

ispat: varsayalım ki $S \neq \mathbb{N}$ olsun.

O halde $\mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$

$\emptyset \neq \mathbb{N} \setminus S \subseteq \mathbb{N}$ olup iyi sıralama aksiyomundan

$\mathbb{N} \setminus S$ kümesinin bir en küçük elemanı var.

Bu elemanı m ile gösterelim.

$m \in \mathbb{N} \setminus S$ ve her $n \in \mathbb{N} \setminus S$ iken

$$m \leq n$$

Öte yandan $1 \in S$ idi. O halde $1 \notin \mathbb{N} \setminus S$

Dolayısıyla

$m > 1$ olur. Öte yandan $m-1 < m$

O halde $m-1 \notin \mathbb{N} \setminus S \Rightarrow m-1 \in S$

ii) den $m = \underbrace{m-1}_{\in S} + 1 \in S$

→ ←
(Çünkü $m \in \mathbb{N} \setminus S$ idi)

Tümevarım (Zayıf Form) : n : Doğal sayıları temsil etmek üzere $P(n)$ önermesi verilsin.

$$S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ önermesi doğru}\} \subseteq \mathbb{N}$$

yukarıdaki teoremden Eğer;

i) $1 \in S$ (yani $P(1)$ önermesi doğru, bir başka ifadeyle $n=1$ için $P(n)$ önermesi doğru)

ii) $k \in S$ iken $k+1 \in S$ (yani $P(k)$ önermesi doğru iken $P(k+1)$ önermesi de doğru)

Kosulları sağlanıyorsa $S = \mathbb{N}$ dir.

Yani; Her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ önermesi doğrudur.

Not! $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$P(n) = n \geq n_0$ için geçerli bir önerme olsun.

i) $n = n_0$ için $P(n)$ önermesi doğru

ii) $k \geq n_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $P(k)$ önermesi doğru iken $P(k+1)$ önermesi de doğru ise

her $n \geq n_0$ için $P(n)$ önermesi doğrudur.

Örnek 1 Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

$$P(n) : 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

i) $P(1)$ önermesi doğrudur.

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

ii) $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $P(k)$ önermesi doğru olsun.
Yani

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2} \text{ olsun.}$$

$$\frac{1+2+\dots+k+k+1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{k(k+1)}{2} + k+1 = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$P(k+1)$ önermesi de doğru. Dolayısıyla tümevarım hipotezinden her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ önermesi doğru. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

örnek 2

$a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq b$) olmak üzere

$$P(n) = a-b \mid a^n - b^n$$

her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ önermesinin doğru olduğunu tümevarımla gösterebiliriz.

i) $n=1$ için önerme doğru ($P(1)$ önermesi doğru)

$$(a-b \mid a^1 - b^1 = a-b)$$

ii) $n=k$ için önerme doğru olsun. Yani

$$a-b \mid a^k - b^k \text{ olsun.}$$

$$a^{k+1} - b^{k+1} = \underbrace{a^{k+1} - ab^k}_{a(a^k - b^k)} + \underbrace{ab^k - b^{k+1}}_{b^k(a-b)} = \underbrace{a(a^k - b^k)}_{a-b \text{ ye bölünür}} + \underbrace{b^k(a-b)}_{a-b \text{ ye bölünür}}$$

$a-b \mid a^{k+1} - b^{k+1}$ olup $n=k+1$ için de önermemiz doğru olup

tümevarım hipotezinden her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ önermesi doğrudur. Yani

$$a-b \mid a^n - b^n \quad (\text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için})$$

Örnek 3 $\lim_{x \rightarrow a} c = c$, $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ ve limit kurallarını kullanarak

$P(x)$ bir polinom fonksiyon olmak üzere;

$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$ olduğunu gösterelim.

$P(n)$: $P(x)$ polinomunun derecesi, n , ne olursa olsun

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a) \quad \text{yani;}$$

$P(n)$: der $P(x) = n$ olmak üzere $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$ ($n \geq 0$)

$P(0)$: der $P(x) = 0$ ise $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$ önermesi doğrudur.

der $P(x) = 0$ ise $P(x) = c$ (sabit)

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c = P(a)$$

$n = k$ için önermemiz doğru olsun.

Yani;

der $P(x) = k$ ise $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$ olsun.

Şimdi

der $P(x) = k+1$ olsun.

$$P(x) = \underbrace{b_{k+1} x^{k+1}}_{\neq 0} + \underbrace{\dots}_{q(x) \text{ derecesi } k \text{ dan küçük veya eşit olan terimler var.}}$$

$$P(x) = b_{k+1} x^{k+1} + q(x)$$

der $q(x) < k$ olabileceğinden tümevarım (Zayıf form) prensibini bu şekil ile kullanamayacağız.

Önerme: Tümevarım (Güçlü Form): $P(n)$ bir önerme olsun. ($n \in \mathbb{N}$) :

i) $P(1)$ doğrudur.

ii) $P(1), P(2), \dots, P(k)$ doğru iken $P(k+1)$ doğru ise her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ önermesi doğrudur.

yukarıdaki örnek için tümevarım prensibi güçlü form kullanacağız.

i) $P(1)$ önermesi doğru

ii) $P(1), \dots, P(k)$ önermeleri doğru olsun. Yani;

der $P(x) \leq k$ ise $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$ olsun.

der $P(x) = k+1$ ise $P(x) = b_{k+1} x^{k+1} + q(x)$ der $q(x) \leq k$

Dolayısıyla $\lim_{x \rightarrow a} q(x) = q(a)$ o halde;

$$\lim_{x \rightarrow a} b_{k+1} x^{k+1} = b_{k+1} a^{k+1} \quad (\text{limit kuralı})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = b_{k+1} a^{k+1} + q(x) = P(a)$$

o halde der $P(x) = n$

$n \geq 0$ iken

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a) \text{ olur}$$

Ödev

1) $r \neq 1$ olmak üzere

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

2) $X_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ olmak üzere

$$X_n \leq 2 - \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

tümevarımlarla gösteriniz.