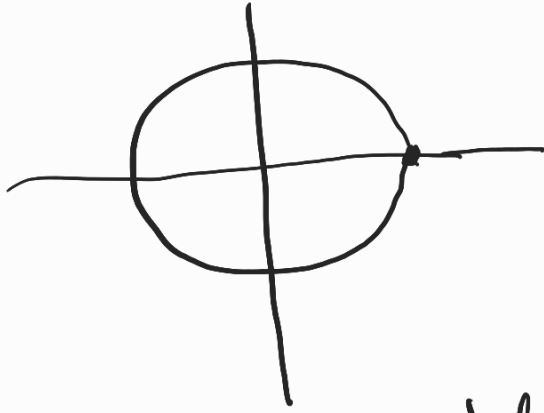


Trigonometrik Fonksiyonlar

U : merkezi $(0,0)$ yarıçapı 1 olan
çember olsun (Birim çember)

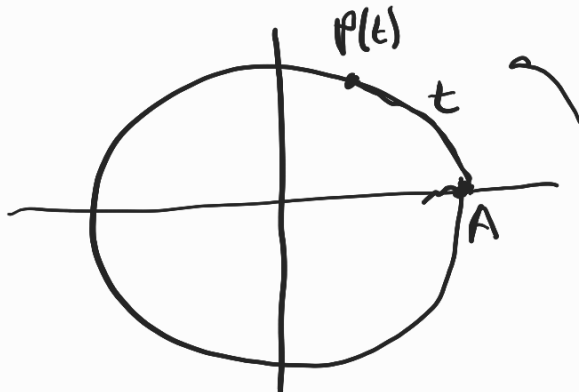


U üzerinde
 $A = (1,0)$ noktasını
ele alalım

$t \in \mathbb{R}$ alalım $P(t) \in U$ tanımlayacağız

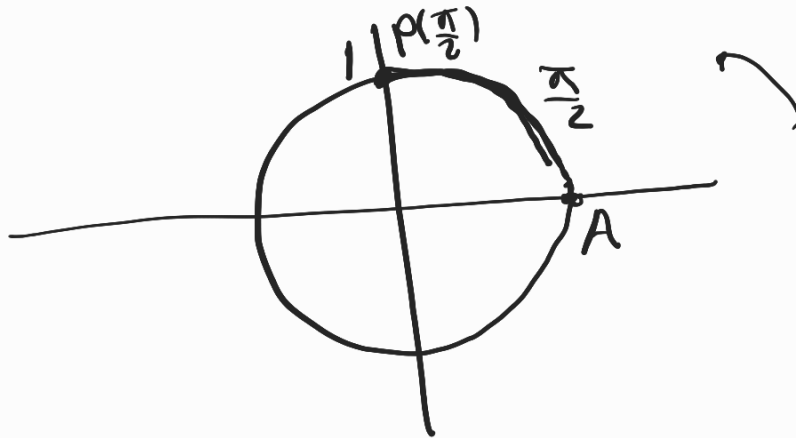
2) Eğer
 $t \geq 0$ ise

$P(t)$: U üzerinde, $A = (1,0)$ noktasından
başlayarak saat yönünün tersi yönde t
birim yol katederek varılan nokta
 $t \geq 0$ ise

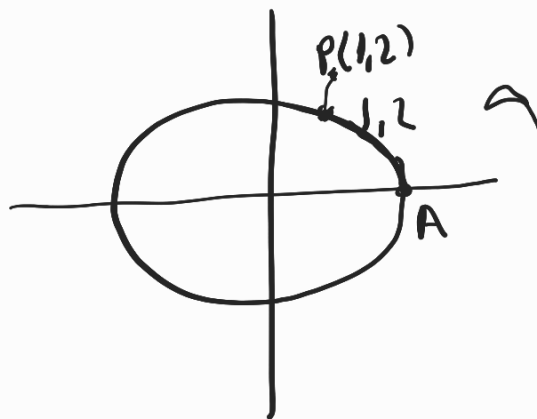


örneğin $P(0) = A = (1,0)$ olur

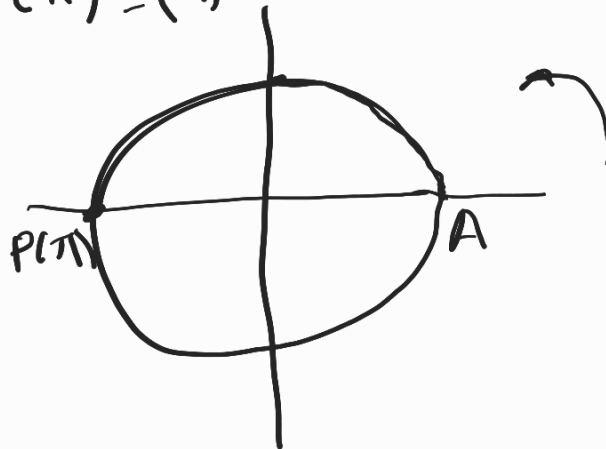
$$8r: P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$$



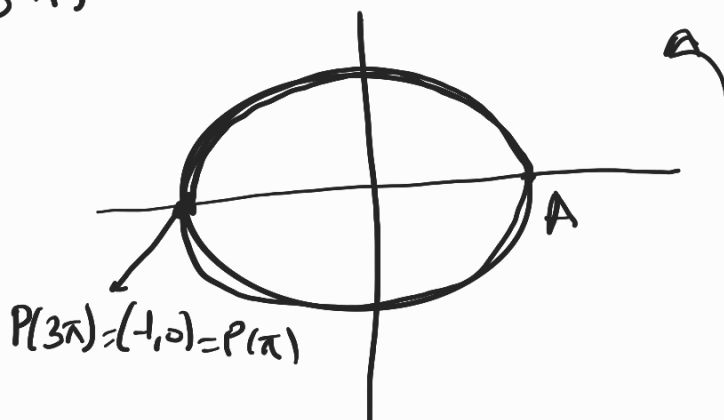
$$8r \text{ again: } P(1, 2)$$



$$8r) P(\pi) = (-1, 0)$$

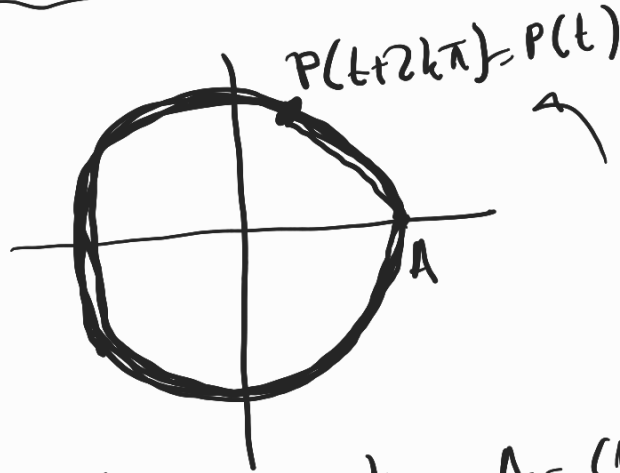


$$8r) P(3\pi) =$$



Gösteren $t \geq 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ in

$$\underline{P(t+2k\pi)} = P(t)$$



$P(t+2k\pi)$: U üzerinde $A=(1,0)$ noktasından başlayarak saat yönünün tersi yönde k -tam tur yapıp sonra t birim yol kat ederek verilen noktadan saat yönünün tersi yönde t birim yol katetmek ile verilen nokta $= P(t)$

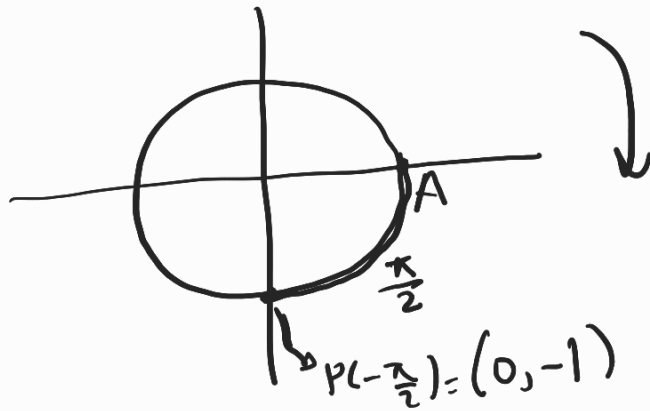
Şimdiye kadar negatif olmayan her reel sayıya U üzerinde bir nokta (birer bir değer) karşılık getirdik.

Şimdi Eğer $t < 0$ ise

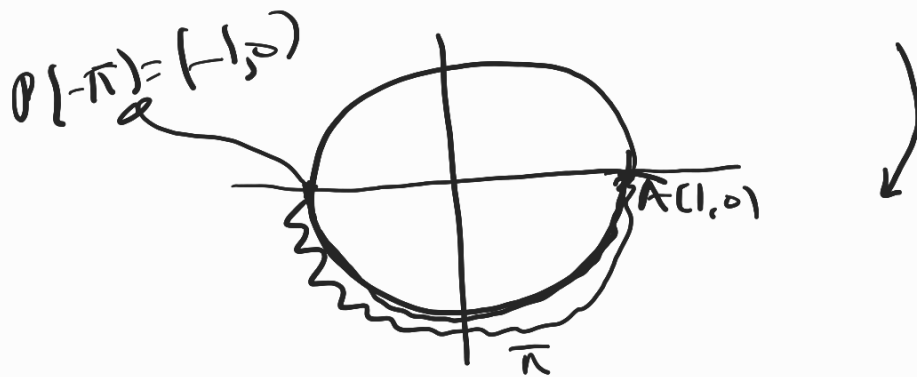
$P(t) \in U$ noktasını böyle tanımlayacağız:

$P(t)$: $A=(1,0)$ noktasından saat yönünde
 U içinde $|t|$ birim yol katederek
 varılan nokta.

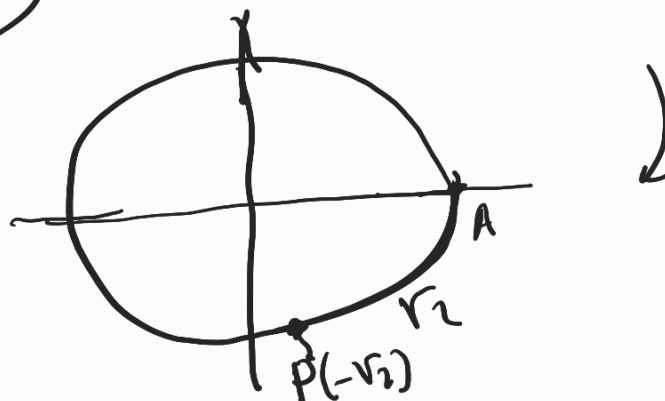
Örneğin $P(-\frac{\pi}{2}) = (0, -1)$



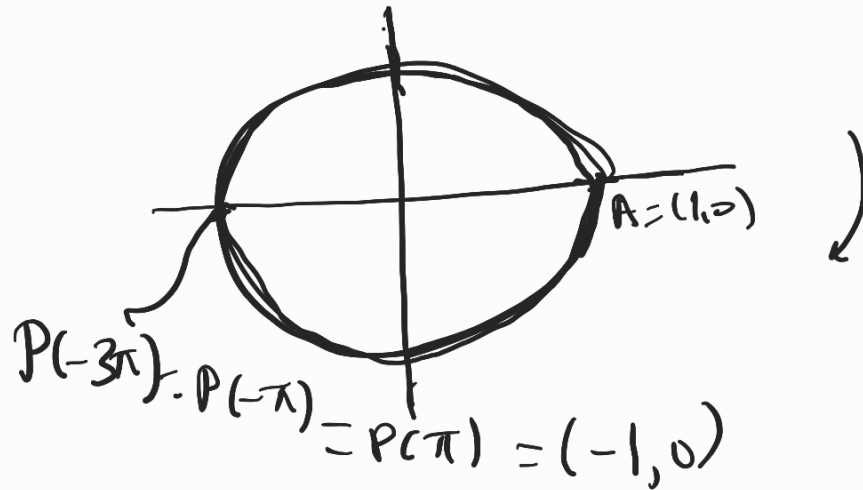
Örneğin $P(-\pi) = (-1, 0)$



Örneğin $P(-\sqrt{2})$



$$d) \quad P(-3\pi)$$



Dolayısıyla her reel sayıya U içinde bir nokta karşılık gelen (bir-bir olmayan) bir fonksiyon tanımladı.

Bu fonksiyon P ile gösterelim.

$$P: \mathbb{R} \rightarrow U$$

$$t \mapsto P(t) \in U$$

bir-bir olmayan bir fonksiyon

Bu Fonksiyonun Bazı Özellikleri

$$1) \quad \text{her } t \in \mathbb{R} \quad \text{İçin } P(t) \in U$$

$$(x, y) \in U \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$P(t) = (x(t), y(t)) \in U \Rightarrow (x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$$

her $t \in \mathbb{R}$ için $P(t) = (x(t), y(t)) \in U$
 Dolayısıyla $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$

2) $P(t) = (x(t), y(t))$ $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$
 $(x(t))^2 \geq 0$ $(y(t))^2 \geq 0$

Dolayısıyla

$$0 \leq (x(t))^2 \leq 1 \quad 0 \leq (y(t))^2 \leq 1$$

Burada

$$\sqrt{(x(t))^2} \leq 1, \quad \sqrt{(y(t))^2} \leq 1$$

$$|x(t)| \leq 1, \quad |y(t)| \leq 1$$

$$-1 \leq x(t) \leq 1, \quad -1 \leq y(t) \leq 1$$

yani her $t \in \mathbb{R}$ için $P(t) = (x(t), y(t))$

$$\text{in } \underline{-1 \leq x(t) \leq 1, \quad -1 \leq y(t) \leq 1}$$

3)

$k \in \mathbb{Z}$ in

$P(2k\pi)$

$k \geq 0$ in saat yönünde
 günde k tam tur sırasında
 verilen nokta $= A = (1, 0)$

$k < 0$ in saat yönünde
 k tam tur sırasında verilen
 nokta $= A = (1, 0)$

$t \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak i $\ddot{c}$ er
 $P(t+2k\pi) = P(t)$ olur.

4) her $t \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ i $\ddot{c}$ in

$$P(t+2k\pi) = P(t) \text{ idi}$$

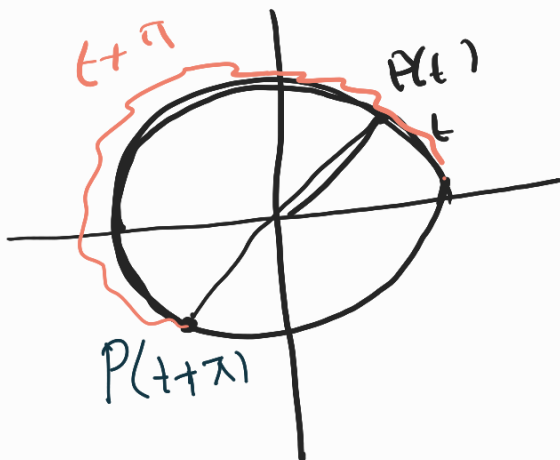
$$P(t+2k\pi) = (x(t+2k\pi), y(t+2k\pi))$$

$$P(t) = (x(t), y(t))$$

$$P(t+2k\pi) = P(t) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(t+2k\pi) = x(t) \\ y(t+2k\pi) = y(t) \end{cases}$$

5) $P(t+\pi) = -P(t)$



$P(t)$ ile $P(t+\pi)$
 0.1)ine g $\ddot{u}$ re simetrik
 noktalar dır. Dolayısıyla

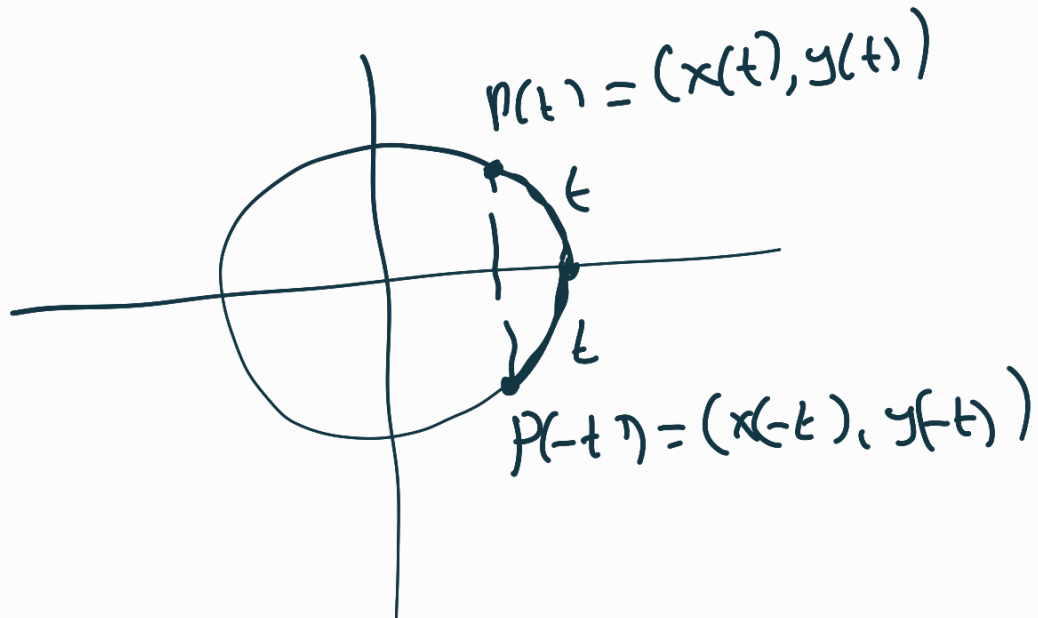
$$P(t+\pi) = -P(t)$$

$$P(t+\pi) = (x(t+\pi), y(t+\pi))$$

$$P(t) = (x(t), y(t))$$

$$P(t+\pi) = -P(t) \Rightarrow \begin{cases} x(t+\pi) = -x(t) \\ y(t+\pi) = -y(t) \end{cases}$$

6) $P(-t)$ ile $P(t)$ noktaları
 x -eksenine göre simetrik noktalar oldu.



$$\begin{aligned} x(-t) &= x(t) \\ y(-t) &= -y(t) \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

Dikkat edilirse

$P: \mathbb{R} \rightarrow U$ fonksiyonu

$$t \mapsto P(t) = (\underline{x(t)}, \underline{y(t)})$$

$$\begin{aligned} x: \mathbb{R} &\rightarrow [-1, +1] \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y: \mathbb{R} &\rightarrow [-1, +1] \\ t &\mapsto y(t) \end{aligned}$$

funksiyonlarını belirler

(x ve y fonksiyonları sırasıyla
 P fonksiyonunun x ve y koordinat fonksiyonlarıdır)

Tanım. Yukarıda bahsedilen

$$x: \underline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, +1] \quad , \quad y: \underline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, +1]$$
$$t \longrightarrow x(t) \quad \quad \quad t \longrightarrow y(t)$$

fonksiyonlarına Sıra Sıra kosinus
ve Sinüs fonksiyonlarıdır. denir ve

$$x(t) = \cos t$$

$$y(t) = \sin t \quad \text{İle gösterilir.}$$

Ör) $\cos \frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{2}$ sayısının kosinus değeri
yani $P(\frac{\pi}{2}) \in U$ noktasının
apsisi

$$P(\frac{\pi}{2}) = (0, 1) \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$\sin \frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{2}$ sayısının sinüs değeri
yani $P(\frac{\pi}{2}) \in U$ noktasının
ordinatı

$$P(\frac{\pi}{2}) = (0, 1) \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Kosinus ve Sinüs Fonksiyonları Bazı Özellikleri

1) her $t \in \mathbb{R}$ için

$$-1 \leq \cos t \leq 1, \quad -1 \leq \sin t \leq 1$$

2) her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

3) $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\cos(t + 2k\pi) = \cos t$$

$$\sin(t + 2k\pi) = \sin t$$

Kosinus ve
sinüs fonksiyonları
periyodik fonksiyonlardır.

Periyodik Fonksiyon ne demek?

Tanım: Eğer her $x \in D_f$ için

$$f(x+k) = f(x) \quad \text{v.s.} \quad \text{sabit bir}$$

$k \in \mathbb{R} - \{0\}$ varsa f fonksiyonuna periyodik bir
fonksiyon $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ sayısında f nın bir
periyodu denir.

$$\text{Ör)} \quad \begin{aligned} \cos(t+2\pi) &= \cos t & \text{her } t \in \mathbb{R} \text{ için} \\ \sin(t+2\pi) &= \sin t & \text{her } t \in \mathbb{R} \text{ için} \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\cos$ ve $\sin$ fonksiyonları Periyodik fonksiyonlardır ve 2π sayısı bu fonksiyonların bir periyodudur.

Ayrıca $k \in \mathbb{Z}$

$$\cos(t+2k\pi) = \cos t$$

$$\sin(t+2k\pi) = \sin t \quad \text{her } t \in \mathbb{R} \text{ için}$$

Olduğundan $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$2k\pi$ sayılarının hepsi bu fonksiyonların birer periyodudur.

Ör) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ periyodik bir

funksiyondur $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$f(x+k) = x+k - \lfloor x+k \rfloor$$

$$= x+k - (\lfloor x \rfloor + k) = x - \lfloor x \rfloor = f(x)$$

şifredan ^{her} tüm tam sayılar bu fonksiyonun birer periyodudur.

Tanım: (Asal Periyot): Periyodik bir fonksiyonun (varsun) pozitif periyotlarının en küçüğüne asal periyot denir.

M) Kosinus ve Sinüs fonksiyonlarının
Periyotları = $\dots -4\pi, -2\pi, 2\pi, 4\pi, \dots$

2π : Kosinus ve Sinüs fonksiyonlarının
asal periyodu

N) $f(x) = x - [x]$ Periyodik fonksiyon
Periyotları: $\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots$

1: bu fonksiyonun asal periyodu

Not: Bir periyodik fonksiyonda asal periyot
her zaman olmayabilir

O) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \text{ in} \\ 1 & x \notin A \text{ in} \end{cases}$

f Periyodik bir fonksiyondur.

$r \in \mathbb{Q}$ alalım

$$f(x+r) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \text{ in } x+r \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \text{ in } x+r \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$= f(x)$$

f Periyodik bir fonksiyondur ve sıfırdan farklı tüm rasyonel sayılar f 'nin bir periyodudur. Ancak en küçük pozitif rasyonel sayı olmadığından asal periyodu yoktur.

ör) $\cos g_0$ $\sin g_0$ değerleri
sayalım

$\cos g_0$: g_0 sayısının kosinüs değeri

$\sin g_0$: g_0 sayısının sinüs değeri

$P(g_0) \in \mathbb{U}$ noktasının apsisi ve ordinatı

