

UYGULAMA2

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ $D_f = ?$

$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$ $D_g = ?$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ $D_g = (-1, 2]$ ise $D_{gof} = ?$

3) $f(x) = x^2 - 4x$ in monoton olduđu aralýklarý bulunuz.

4) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nin monoton olduđu u aralýklarý bulunuz.

5) $f(x) = \begin{matrix} x^2 & x \geq 1 \\ x - 1 & x < 1 \end{matrix}$ ise $f(x)$ in 1-1 olduđu unu gösteriniz. R_f yi

bulunuz.

Ters fonksiyonu bulunuz.

6) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ve $g(x) = \sqrt{2 - x}$ ise D_{gof} ve D_{fog} u bulunuz.

7) $f(x)$ ve $g(x)$ tek ise $f.g$ çift, $f - g$ tek ve fog tek olduđu unu gösteriniz.

8) $f(x)$ ve $g(x)$ I aralýğýnda artan ise $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, \forall x \in I$ ise $f.g$

nin

I da artan olduđu unu gösteriniz.

9) $f(x), I$ da kesin azalan $f(I) \subset J$ ve $g(x), J$ de kesin azalan ise gof nin I da kesin

artan olduđunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

$\frac{x+1}{x-2} \geq 0$

$D_f = (-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$

$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$ (

$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ ve $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ olur.

Bu durumda $D_g = (2, +\infty)$ olur.

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ $D_g = (-1, 2]$

$D_{gof} = \{x : x \in D_f \text{ ve } f(x) \in D_g\} = \{x : |x| \geq 1, \sqrt{x^2 - 1} \leq 2\}$

$0 \leq x^2 - 1 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 5$ buradan da $0 \leq x^2 - 1$ ve $x^2 - 5 \leq 0$ olur.

$D_{gof} = [-\sqrt{5}, -1] \cup [1, \sqrt{5}]$

3) $x_1 < x_2$ olsun. $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - 4x_1 - x_2^2 + 4x_2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 4)$

bulunur. $x_1 < x_2$ olduđu undan $x_1 - x_2 < 0$ dýr. $x_1 + x_2 + 4 \leq 0$ veya $x_1 + x_2 + 4 \geq 0$

olacađ ýndan $(-\infty, 2)$ aralýğýnda azalan $(2, +\infty)$ aralýğýnda artandýr.

4) $x_1 < x_2$ olsun. $f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_1^2 x_2^2}$

$x_2 + x_1 < 0$ ise $(-\infty, 0)$ da artan $x_2 + x_1 > 0$ ise $(0, +\infty)$ da azalandýr.

5) $x_1, x_2 \geq 1$ alalım . $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1, x_2 \geq 1$ olduğundan $x_1 = x_2$ dır.

$x_1, x_2 < 1$ alalım. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

$x_1 < 1, x_2 \geq 1$ olsun. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2^2 \Rightarrow x_1 - 1 < 0$, $x_2^2 \geq 1$ olduğundan

$f(x_1) \neq f(x_2)$ dir . $f, 1 - 1$ dir.

$R_f = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$

$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 1 \\ x + 1 & x < 0 \end{cases}$

6) $gof(x) = g(f(x)) = \sqrt{2 - \sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow 2 - \sqrt{1 - x^2} \geq 0$ ve $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow D_{gof} = [-1, 1]$

$fog(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 - (\sqrt{2 - x})^2} \Rightarrow 1 - (\sqrt{2 - x})^2 \geq 0$ ve $2 - x \geq 0 \Rightarrow D_{fog} = [1, 2]$

7) f ve g tek olduğundan $f(-x) = -f(x), g(-x) = -g(x)$ dir.

$f.g(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = f.g(x)$ ise fg çifttir.

$(f - g)(-x) = f(-x) - g(-x) = -f(x) + g(x) = -(f(x) - g(x)) = -(f - g)(x)$ ise $f - g$ tektir.

$fog(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -fog(x)$ ise fog tektir.

8) f ve g, I aralığında artan ise

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ve $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$

$f.g(x_1) = f(x_1).g(x_1) \leq f(x_1)g(x_2) \leq f(x_2)g(x_2) = f.g(x_2)$

9) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), x_i \in I$ ve $y_1 > y_2 \Rightarrow g(y_1) < g(y_2), y_i \in J$

$x_1 < x_2$ olsun. $gof(x_1) = g(f(x_1)) < g(f(x_2)) = gof(x_2)$