

Bir Cebirsel olmayan Fonksiyon Örneği

Tam Değer Fonksiyonu: her reel sayıya

kendisinden küçük veya eşit olan en büyük
tamsayı ile eşleyen fonksiyondur

Tamdeğer fonksiyonunu $\lfloor \cdot \rfloor$ ile göstereceğiz

$$\lfloor \cdot \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$x \in \mathbb{R}$ için $\lfloor x \rfloor$: x den küçük veya eşit olan
en büyük tamsayı

$$\lfloor 2,1 \rfloor = 2 \quad \lfloor 2,5 \rfloor = 2$$

$$\lfloor -1,9 \rfloor = -2 \quad \lfloor 0 \rfloor = 0$$

$$\lfloor x \rfloor = n \in \mathbb{Z} \text{ için}$$

$$n \leq x < n+1 \text{ olur}$$

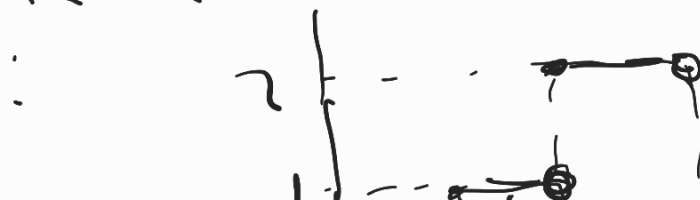
$$\text{tüm } n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1 \text{ için } \lfloor x \rfloor = n$$

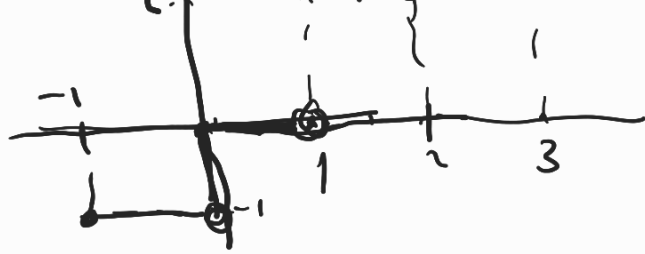
yani

$$0 \leq x < 1 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 1$$

$$-1 \leq x < 0 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = -1$$





Kapalı Fonksiyon: Bazen $y=f(x)$

Fonksiyon $F(x,y)=0$ şeklinde bir
özellik belirli olur Herkes baten

$F(x,y)=0$ şeklinde bir özdeşlik
bir den fazla $y=f(x)$ şeklinde
fonksiyon belirli

Ö) $\underbrace{x^2 + y - 1 = 0}_{F(x,y)}$

şeklinde bir özdeşlik
 $y = \underbrace{1 - x^2}_{f(x)}$ fonksiyonu
belirli

bir başka ifade ile

$y = 1 - x^2$ fonksiyonu

$F(x,y) = x^2 + y - 1 = 0$ özdeşliği ile belirli

Ö) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ özdeşliği

$y = \sqrt{1 - x^2}$ ve $y = -\sqrt{1 - x^2}$

fonsiyonlarını belirli

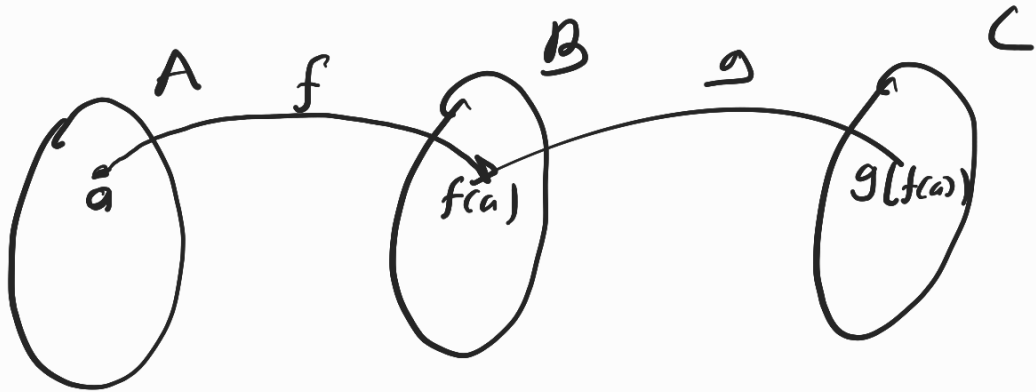
Eğer bir veya birden fazla $y=f(x)$

$F(x,y)=0$ şeklinde bir

fonksiyon
 özdeşlik beklisi ve bu fonksiyonlara
 kapalı fonksiyonlar) dır.

Bileşke Fonksiyon

$f: A \rightarrow B$ $g: B \rightarrow C$ fonksiyonlar
 olsun



$$g \circ f: A \rightarrow C$$

$(g \circ f)(a) = g(f(a))$ olarak tanımlanan
 fonksiyona bileşke fonksiyon dır.

D_f : f nin tanım kümesi:

D_g : g nin tanım kümesi:

$$D_{g \circ f} = \left\{ x: x \in D_f, \overset{\uparrow}{f(x)} \in \overset{\uparrow}{D_g} \right\} \text{ olur.}$$

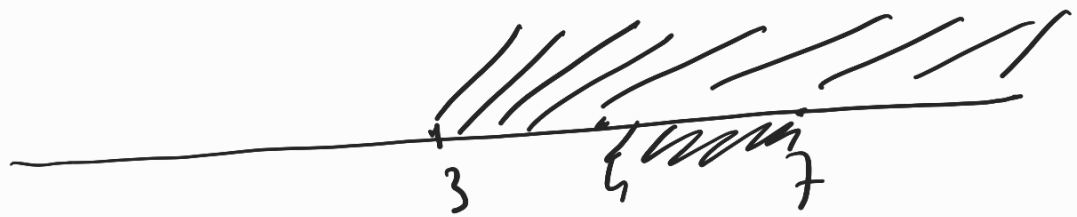
$$D_{f \circ g} = \left\{ x: x \in D_g, g(x) \in D_f \right\} \text{ olur.}$$

Ör) $f(x) = \sqrt{x-3}$ ve $D_g = (1, 2)$ in

$D_{g \circ f}$ yi bulunuz.

Wsk: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\} = [3, +\infty)$

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : \underline{x \in D_f}, f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [3, +\infty), \sqrt{x-3} \in (1, 2)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3, 1 < \sqrt{x-3} < 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3, 1 < x-3 < 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3, 4 < x < 7\} \end{aligned}$$



$$D_{g \circ f} = (4, 7)$$

8.) $f(x) = \sqrt{x-3}$ $g(x) = x+2$ in

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-3}) = \sqrt{x-3} + 2$$

$$D_{g \circ f} = \{x : x-3 \geq 0\} = [3, +\infty)$$

Die ganzen Zahlen sind ungerade

$$\{x \in \mathbb{Z} : f(x) \in D_g\}$$

$$D_{g \circ f} = \left\{ x: \begin{array}{l} x \in D_f, \\ \sqrt{x-3} \in \underbrace{\mathbb{R}}_{D_g} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x: x \in [3, +\infty), \sqrt{x-3} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= [3, +\infty)$$

Not: f if formülünün kulerak denem kimesin:
yuzmak baten gaulten dabitir (buna dilitir
etmek gectir)

$$Dr) \quad f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = \frac{|\sqrt{x-1}|}{\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \neq 1 \\ \text{m} \end{array} \right)$$

$$\underline{D_{f \circ g} = [1, +\infty) \left(\begin{array}{l} \text{gerek} \\ (f \circ g)(x) = 1 \end{array} \right)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{yani} \\ (x \geq 1 \text{ m}) \end{array} \right)$$

Or yenden

$$D_{f \circ g} = \left\{ x: \begin{array}{l} x \in \underbrace{D_g}_{[1, +\infty)}, \\ g(x) \in D_f \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x: \underline{x \in [1, +\infty)}, \sqrt{x-1} \in \underbrace{\mathbb{R} - \{0\}}_{D_f} \right\}$$

$$= \left\{ x: \underline{x \geq 1} \wedge \sqrt{x-1} \neq 0 \right\}$$

$$= \left\{ x: \underline{x \geq 1} \wedge x \neq 1 \right\}$$

$$= (1, +\infty)$$

Ters Fonksiyon

$f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun Eğer

$$f \circ g = \text{id}_B \quad \text{ve} \quad g \circ f = \text{id}_A$$

$\underbrace{\text{id}_B}_{B \text{ üzerindeki}} \quad \underbrace{\text{id}_A}_{A \text{ üzerindeki}}$
 eşdeşlik fonksiyonu

O.Ş bir $g: B \rightarrow A$ fonksiyonu varsa
 g fonksiyonuna f nin ters fonksiyonu denir
 (Bu durumda f fonksiyonunda g nın
 ters fonksiyonu olur)

ve $g = f^{-1}$ ile gösterilir

Teorem: $f: A \rightarrow B$ fonksiyonun kesi
 olması için gerek ve yeter koşul
 f nin bire-bir ve onto olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $g: B \rightarrow A$ fonksiyon
 tersi olsun

$$g \circ f = I_A$$

$$f \circ g = I_B$$

oldu

f bire-bir dir

$$f(a) = f(a') \quad , \quad a, a' \in A$$

m

$$\underbrace{(g \circ f)(a)}_{I_A} = g(f(a)) = g(f(a')) \underbrace{(g \circ f)(a')}_{I_A}$$

0 halde $f(a) = f(a')$ m $a = a'$ yani
(br başka ifade ile $a \neq a'$ m $f(a) \neq f(a')$)
f bire-bir dir.

f xterdir

$\text{Im } f = B$ olduğıu br başka ifade ile
br $b \in B$ için $f(a) = b$ o.s bir $a \in A$
olduğıu göstereceğiz.

$b \in B$ olsun

$$g: B \rightarrow A$$

$$g(b) \in A$$

$$a = g(b) \text{ diğelim}$$

$$b = \underbrace{(f \circ g)(b)}_I = f(\underbrace{g(b)}_a) = f(a) \Rightarrow f \text{ sur}$$

$\perp B$

($\Leftarrow$) $f: A \rightarrow B$ bir- $\bar{b}$ ir ve $\bar{a}$ ten
 olan f 'nin tersinin var olduğunu
 göstereceğiz yani

$f \circ g = \bar{I}_B$, $g \circ f = \bar{I}_A$ o.s
 ki $g: B \rightarrow A$ bulunur, bulacağız

$f: A \rightarrow B$ bir- $\bar{b}$ ir ve $\bar{a}$ ten
 $g: B \rightarrow A$ böyle tanımlayabiliriz:

$b \in B$ $g(b) = a$ olarak
 tanımlayacağız $\left(\begin{array}{l} \text{burada } a, f(a) = b \\ \text{o.s var olan tek } a \in A \\ \text{dir (f bir- $\bar{b}$ ir ve} \\ \text{ $\bar{a}$ ten olduğu)} \end{array} \right)$

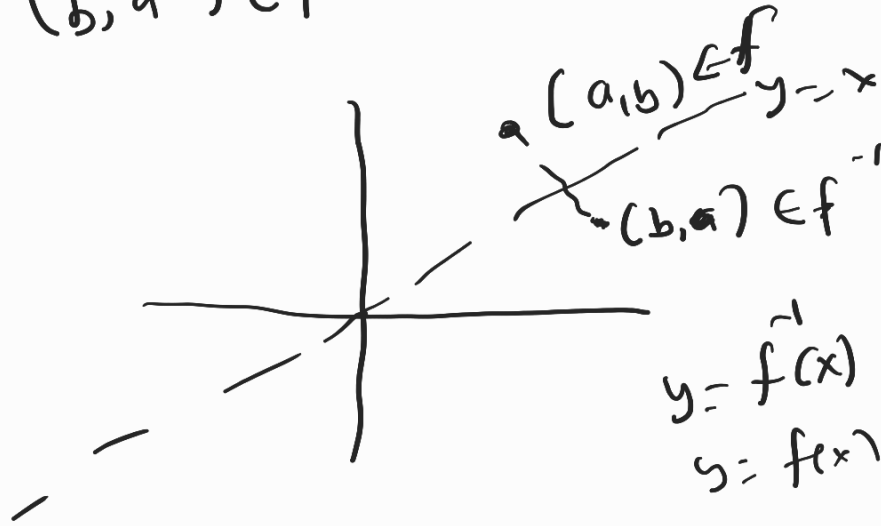
$g: B \rightarrow A$ ki bulunuyor

$$(f \circ g)(b) = f(\underbrace{g(b)}_a) = f(a) = b \quad \text{her } b \in B \text{ için}$$

$$(g \circ f)(a) = g(\underbrace{f(a)}_{\in B}) = a \quad \text{her } a \in A \text{ için}$$

g , f 'nin tersi bulunuyor

$y = f(x)$ bire-bir ve örten fonksiyon
 tersi $y = f^{-1}(x)$ olur
 $(a, b) \in f$ in (yani $b = f(a)$ in)
 $(b, a) \in f^{-1}$ olur (yani $a = f^{-1}(b)$ olur)



$y = f^{-1}(x)$ ters fonksiyon
 $y = f(x)$ fonksiyonunun
 $y = x$ doğrusuna göre
 simetridir.

$y = f(x)$ bire-bir örten fonksiyonunun
 tersi olan fonksiyon bulurken

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \underline{f^{-1}(y)}$$

Dolayısıyla $y = f(x)$ kuralında
 x 'i y 'ye bağlı bir kural olarak
 yazmak gerekir.

(ör) $y = \sqrt{x+1}$ fonksiyonun ters fonksiyon
 buluruz.

$$y = f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$y = \sqrt{x+1} \Rightarrow x+1 = y^2 \Rightarrow x = \underbrace{y^2 - 1}_{f^{-1}(y)}$$

$f(x) = \sqrt{x+1}$ fonksiyonu ters fonksiyon

$$f^{-1}(x) = x^2 - 1 \text{ olur.}$$

Not: bu her zaman mümkün olmayabilir

örneğin

$y = x^7 + 5x^2 + x^3 - 2x + 1$ fonksiyon
ters fonksiyonu benzer şekilde yazamayız
($*$ i denklemden çözemediğimiz)
