

Fonksiyon

Tanım: $\emptyset \neq A, \emptyset \neq B$ olmak üzere
A'den B'ye bir f bağıntısı,

~~*~~ her $a \in A$ için $(a, b) \in f$ o.ş
bir ve bir tek $b \in B$ var

koşulunu sağlıyor ise f ye A kümesinden
B kümesine tanımlı bir fonksiyon denir.

Ö) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{b, c\}$

$$f = \{(1, c), (1, b), (2, c), (3, b)\} \subset A \times B$$

f bağıntısı bir fonksiyon değildir

A kümesinin 1 elemanı, f bağıntısı
ile B kümesinin b ve c elemanları
(birden fazla) ile eşleştirenden f bir
fonksiyon değildir

Ö) i) $f = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y \geq x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

ii) $f = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y = x^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

iii) $f = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

iii) $f = \{ (x, y) : \dots \}$
 bağntılarına fonksiyon olup olmadığını
 belirleyiniz.

i) $f = \{ (x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y \geq x \} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

f bağntısı $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı
 bir fonksiyon değildir.

$(\underset{\sim x}{1}, \underset{\sim y}{2}) \in f, (1, 3) \in f \dots$

f bir fonksiyon değildir.

ii) $f = \{ (x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y = x^2 \} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

f bağntısı $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir
 fonksiyon

her $x \in A$ için $(\underset{\sim x}{x}, \underset{\sim x^2}{x^2}) \in f$

her $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \in \mathbb{R}$ ile eşleştğinde

f $A = \mathbb{R}$ den $B = \mathbb{R}$ ye bir fonksiyondur.

iii) $f = \{ (x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x = y^2 \} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

f $A = \mathbb{R}$ den $B = \mathbb{R}$ ye bir
 fonksiyon değildir.

her $x \in A = \mathbb{R}$ bir ve bir tek $y \in B = \mathbb{R}$
ile f bağıntısı altında eşleşmeye
örneğin $x = 1 \in A = \mathbb{R}$

$$(1, 1) \quad (1, -1) \in f$$

Göstern:

$f \subseteq \underline{A \times B}$ bir fonksiyon m
neden $A \xrightarrow{f} B$ ile
 $f: A \rightarrow B$ gösterilir.

Eğer $(a, b) \in f$ m
 $a \xrightarrow{f} b$ veya $b = f(a)$
ile gösterilir.

Tanım: $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon m
 A kümesine f nin tanım kümesi
denir ve $A = D_f$ ile gösterilir.

B kümesine f m değer kümesi
denir. ve $B = R_f$ ile gösterilir.

$$f(A) = \text{Im } f = \left\{ b \in B : \text{bir } a \in A \text{ için} \right. \\ \left. b = f(a) \right\} \subseteq B$$

kümesine f fonksiyonu görüntü kümesi

dir.

Tanım: Görüntü kümesi, bek elemeli olan fonksiyonlara sabit fonksiyon dir.

Tanım: Her A kümesi için

$I_A: A \rightarrow A$ $I_A(a) = a$ olan fonksiyon A kümesi üzerinde ki özdeşlik fonksiyon dir.

Tanım: Görüntü kümesinin Değer kümesine eşit olduğu fonksiyonlara örten fonksiyonlar dir.

$f: A \rightarrow B$ örten $\Leftrightarrow B = \text{Im } f$

Yani f örten $\Leftrightarrow$ her $b \in B$ için $b = f(a)$ o.ş en az bir $a \in A$ var.

Tanım: $f: A \rightarrow B$

$a_1 \neq a_2$ için $f(a_1) \neq f(a_2)$

İse f fonksiyonuna bire-bir fonksiyon dir.

Tanım: (Sayısal Fonksiyonlar): $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

$\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \rightarrow B$ bir sayısal fonksiyon dir.

fonksiyon

Not: Sayısal fonksiyonlar sayı kümeleri arasında ~~Bir~~ bir yapa bir kural (formül olabilir)

Örneğin $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ kuralı (bir formül) ile belirli sayısal fonksiyon

Örneğin $f(2) = 2^2 = 4$

Bazı sayısal fonksiyonlara tanım ve değer kümeleri verilmeyip sadece kural verilir. Bu durumda tanım kümesi: kuralı anlamlı yapa tüm sayıların kümesi olarak alınır.

ör) $f(x) = \frac{1}{x}$ kuralı ile verilen

Sayısal fonksiyonun tanım kümesi:

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ olarak alacağız

Ancak

$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$
üstteki fonksiyondan farklıdır ($D_f = (0, +\infty)$)

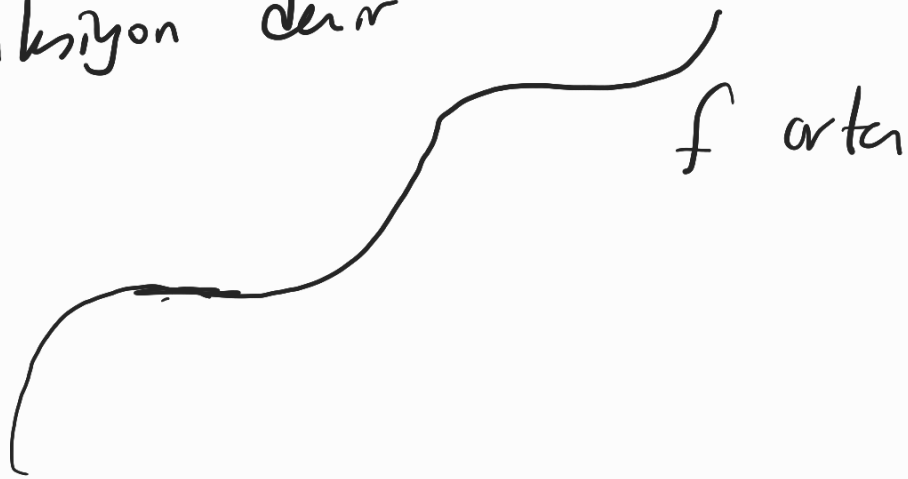
Artan ve Azalan Fonksiyonlar

I bir aralık

Eğer $x_1, x_2 \in I$ ve $x_1 < x_2$ iken

$f(x_1) \leq f(x_2)$ oluyor ise

f fonksiyonuna I aralığında artan
fonksiyon denir



Eğer $x_1, x_2 \in I$ ve $x_1 < x_2$ iken

$f(x_1) < f(x_2)$ oluyor ise

f fonksiyonuna I aralığında kesin
artan fonksiyon denir.

Benzar şekilde

$x_1, x_2 \in I$ ve $\underline{x_1 < x_2}$ iken

$f(x_1) > f(x_2)$ oluyor ise

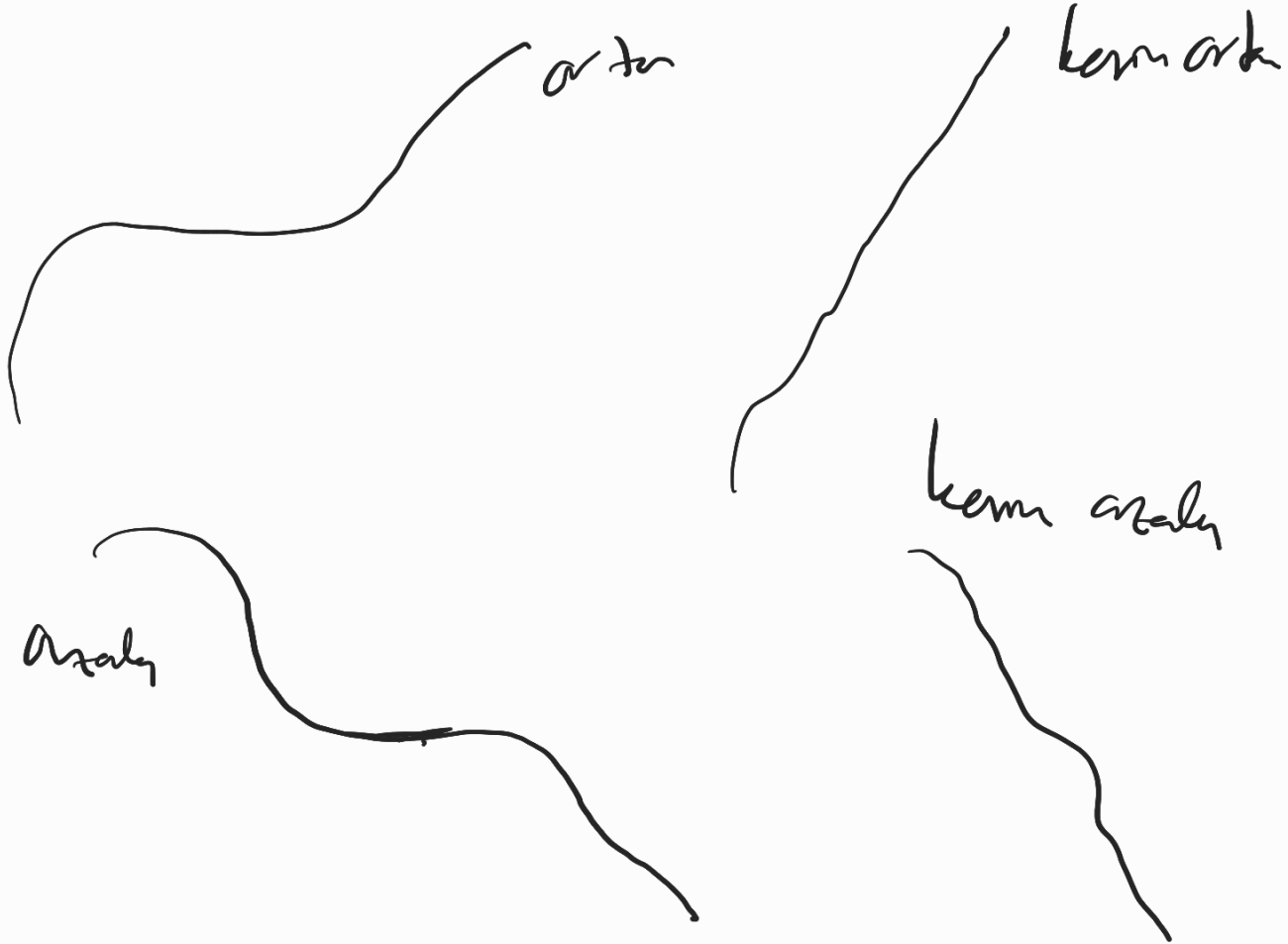
f fonksiyonuna I aralığında azalan

funksiyon der

$x_1, x_2 \in I$ ve $\underline{x_1 < x_2}$ iken

$f(x_1) > f(x_2)$ oluyor ise

f funkiyonuna I araliginde kesin
azalan funkiyon der



Ör) $f(x) = x^2 - 6$ funkiyonunun
artan ve azalan oldugu araliklar,
bulunuz.

Cev: $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 f nin artan oldugu I araligi.

bulmak şu denek:

$x_1, x_2 \in I$ ve $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) \leq f(x_2)$
koşulum sağlayan I aralığını bulmak denek.

$x_1 < x_2$ olsun yani $x_2 - x_1 > 0$
olsun

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - 6x_2 - (x_1^2 - 6x_1)$$

$$= x_2^2 - x_1^2 - 6(x_2 - x_1)$$

$$= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 6(x_2 - x_1)$$

$$= \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} (x_2 + x_1 - 6)$$

$f(x_2) \geq f(x_1)$ yani $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$
olması için $x_2 + x_1 - 6 \geq 0$ olması
gerekir ve yeterlidir.

x_1, x_2 yi hangi I aralığında
almamızın için $x_1 < x_2$ iken $x_1 + x_2 - 6 \geq 0$
olsun

$$x_1 < x_2$$

$$2x_1 < x_1 + x_2$$

$$2x_1 - 6 < x_1 + x_2 - 6$$

o halde eğer $0 \leq 2x_1 - 6$ in

$$\text{yani } 6 \leq 2x_1 \text{ yani } 3 \leq x_1$$

fakat $x_1 < x_2$ idi o halde

$$3 \leq x_1 < x_2 \quad \text{ya}$$

$$0 \leq 2x_1 - 6 < \underbrace{x_1 + x_2 - 6}$$

Dolayısıyla $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$
olu

$$\text{yani } 3 \leq x_1 < x_2 \quad \text{ya}$$

yani $[3, +\infty)$ aralığında

f kesin artar

Şimdi

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} (x_1 + x_2 - 6)$$

f non artan olduğu aralığı
bulmak için

$$f(x_2) - f(x_1) \leq 0 \quad \text{yani}$$

$$x_1 + x_2 - 6 \leq 0 \quad \text{ya da}$$

$x_1 + x_2 - 6 \leq 0$
 x_1 ve x_2 ji hangi I aralığında
 seçersek ki

$x_1 < x_2$ ise $x_1 + x_2 - 6 \leq 0$
 olsun

$x_1 < x_2$ ~~x_2~~ ekleyelim
 $x_1 + x_1 < 2x_2$ -6 ekleyelim

$$x_1 + x_2 - 6 < 2x_1 - 6$$

$$2x_2 - 6 \leq 0 \quad \text{in} \quad x_1 + x_2 - 6 < 2x_1 - 6 \leq 0$$

ya da
 başka
 $x_1 < x_2 \leq 3$ idi

$$x_1, x_2 \in (-\infty, 3] \quad \text{in}$$

$$f(x_1) - f(x_2) \leq 0 \quad \text{yani } f \text{ azalıyor}$$

f $(-\infty, 3]$ aralığında azalıyor

$[3, +\infty)$ " artan f fonksiyonu

f $(-\infty, +\infty)$ (1. Bölüm).

Önem: (tek ve çift fonksiyonlar)

$f: A \rightarrow B$ ve her $x \in A$ için
 $-x \in A$ olsun

Eğer $f(-x) = f(x)$ oluyorsa
 f fonksiyonuna çift fonksiyon denir

$f(-x) = -f(x)$ oluyorsa f
fonksiyonuna tek fonksiyon denir

Ö) $f(x) = x^2$ bir çift fonksiyondur

$$(f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x))$$

$f(x) = x^3$ bir tek fonksiyondur

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

f çift fonksiyon ise

$(x, y) \in f$ ise $(-x, y) \in f$

$$((x, y) \in f \Leftrightarrow y = f(x))$$

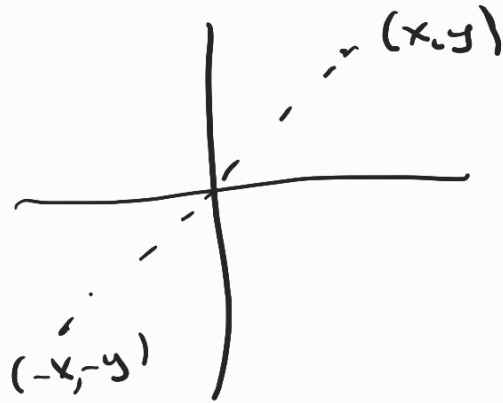
$$f \text{ çift} \Rightarrow y = f(x) = f(-x) \Leftrightarrow (-x, y) \in f$$

$$(x, y) \in f \rightarrow (-x, y) \in f$$



* tek bölünür

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (-x, -y) \in f$$



Not: Sayısal Fonksiyonlar, 2 sınıfta
maceraceğı

1. Cebirsel Fonksiyonlar
2. Cebirsel olmayan (Transcendent)
Fonksiyonlar.

Cebirsel Fonksiyonlar: Kabaca cebirsel
fonksiyonlar formülü cebirsel işlemlerle
(yani toplama ve çarpma ile belirlenen)
belirli fonksiyonlardır.

ör) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$ cebirsel fonksiyon

$f(x) = \sqrt[3]{x} + x$ cebirsel fonksiyon

formal form:

$y=f(x)$ funksiyon eger

$P_m(x), P_{m-1}(x), \dots, P_0(x)$ birer Blom
Grahim olmaq stee

$P_m(x)y^m + P_{m-1}(x)y^{m-1} + \dots + P_1(x)y + P_0(x) = 0$
gibi bir odatda saglayr in
 $y=f(x)$ funksiyonun bir cebirsel funksiyon
dur

Dr) $y=f(x) = \frac{\sqrt{x} + x}{x-1}$ Cebirsel funksiyon

$$y = \frac{\sqrt{x} + x}{x-1} \Rightarrow (x-1) \cdot y = \sqrt{x} + x$$

$$(x-1)y - x = \sqrt{x} \quad \text{Burada}$$

$$((x-1)y - x)^2 = (\sqrt{x})^2$$

$$(x-1)^2 y^2 - 2x(x-1)y + x^2 = x$$

$$(x-1)^2 y^2 - 2x(x-1)y + x^2 - x = 0$$

$$\frac{(x-1)^3}{P_2(x)} + \frac{(x-1)^2}{P_1(x)} - \frac{1}{P_0(x)}$$