

SÜREKLİLİK

Tanım: f fonksiyonu $x=a$ da tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer

her $\varepsilon > 0$ için

$$|x-a| < \delta, x \in D_f \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{v. s.}$$

bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ varsa f fonksiyonu $x=a$ da süreklidir denir.

$D_f = \{a\}$ iken f fonksiyonu $x=a$ da süreklidir. Bu gösterelim.
 $\varepsilon > 0$ verelim

$$|x-a| < \delta, x \in D_f \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{v. s.}$$

bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulacağız.

$\delta > 0$ her ne olursa olsun

$$|x-a| < \delta, x \in D_f = \{a\} \Rightarrow x=a \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$$

Yukarıdaki sonuçta da göldüğü öze f nın $x=a$ da süreklili olması için f fonksiyonunun $x=a$ nın civarında (yani $x=a$ nın sağında ve solunda tanımlı bir fonksiyon olması) tanımlı olması gerekiyor. Ancak sürekliliğin tanımına baktığımızda aşağıdaki sonucu kolaylıkla ulaşabiliriz.

Teorem: f fonksiyonu $x=a$ nın civarında
($x=a$ dahil) tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f \text{ } x=a \text{ da sürekli} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

İspat: Sürekliliğin tanımında okulu.

ör) $f(x) = [x]$ fonksiyonunun düşeyden
 $x = a \in \mathbb{Z}$ noktalarında sürekli değildir

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} [x] = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} [x] = a-1$$

0 halde $\lim_{x \rightarrow a} [x]$ limiti yok.

0 halde yukarıdaki teoremden

$f(x) = [x]$ $a \in \mathbb{Z}$ noktalarında
sürekli değildir.

Ancak $a \notin \mathbb{Z}$ in $f(x) = [x]$ $x=a$ da
sürekli dir.

$$a \notin \mathbb{Z}$$

$$\lfloor a \rfloor = m \in \mathbb{Z}$$

$$m < a < m+1$$

$(m, m+1)$ aralığı $x=a'$ nın bir arası.

$$\underbrace{x \in (m, m+1)}_{\substack{x=a' \text{ nın} \\ \text{bir kısmı}}} \Rightarrow \underbrace{\lfloor x \rfloor = m}_{\text{bir kısmı}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \rightarrow a} m = m = \lfloor a \rfloor = f(a)$$

Ör) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ fonksiyonu $a=0$ noktasında

süreklidir

Çöz: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ fonksiyonu $a=0$ nın etrafında tanımlı bir fonksiyon olmadiğinden

f nın $a=0$ da sürekli olması

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ altına gelmez!}$$

0 halde sürekli tanım kullanacağız.

$\varepsilon > 0$ verilir

$$|x-0| < \delta, \quad x \in D_f = [0, +\infty) \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

o.ş bir $\delta > 0$ bulacağız.

$$|f(x) - \underbrace{f(0)}_0| = x^{\frac{2}{3}} < \delta^{\frac{2}{3}} \leq \varepsilon$$

$\delta^{2/3} \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \delta$ seçmek yeterli
 olur

yani $\delta \leq \varepsilon^{3/2}$ alınabilir

Ötel olarak $\delta = \underline{\varepsilon^{3/2}}$ alabiliriz

sağlanması:

$$\left(|x-0| < \delta = \varepsilon^{3/2}, x \in (0, +\infty) \right) \text{ in}$$

$$x < \varepsilon^{3/2} \quad \vee \quad x > 0 \Rightarrow x^{2/3} < (\varepsilon^{3/2})^{2/3} = \varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$|f(x) - f(0)|$$

Tanım: Eğer f fonksiyonu f nin tanımlı olduğu her noktalar da sürekli ise f ye sürekli fonksiyon denir

ör) Polinom fonksiyonlar sürekli fonksiyonlardır
 $y = P(x)$ bir polinom fonksiyon olsun

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a) \quad \text{olup} \quad y = P(x) \text{ her}$$

$a \in \mathbb{R}$ noktalarında geçerlidir.

ör) Rasyonel fonksiyonlar sürekli fonksiyonlardır.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (p(x) \text{ ve } q(x) \text{ sadeleşmeyen iki polinom})$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$$

$$a \in D_f \text{ in } q(a) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a)$$

Dolayısıyla f tanımlı olduğu her noktada sürekli olduğundan sürekli fonksiyondur.

Ayrıca cebirsel fonksiyonlar sürekli fonksiyondur.

$$N) \quad f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+x^2}}{x^5-1} \quad a \in D_f = \mathbb{R} - \{1\} \text{ in}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x+x^2}}{x^5-1} = \frac{\sqrt[3]{a+a^2}}{a^5-1} = f(a)$$

f tanımlı olduğu her noktada sürekli

$$N) \quad f(x) = \sin x \text{ fonksiyonu sürekli fonksiyondur.}$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ in } \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \text{ olduğu gösterilm}$$

Wann sin mit f(x) = sin(x) kullmarap?

$\varepsilon > 0$ verbin

$$0 < |x-a| < \delta, \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon \quad \text{o.ä.}$$

bzw. $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$
bestimmen

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}$$

$$|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \underbrace{\left| \cos \frac{x+a}{2} \right|}_{\leq 1} \leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right|$$

(Hatervatma: für $x \in \mathbb{R}$ sin

$$|\sin x| \leq |x|$$

☞ halde

$$|\sin x - \sin a| \leq 2 \underbrace{\left| \sin \frac{x-a}{2} \right|}_{\leq \left| \frac{x-a}{2} \right|} \leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x-a| < \delta \leq \varepsilon$$

$$\delta \leq \varepsilon$$

alunablu

87d > krah $\delta = \varepsilon$
alunablu

Berter selilde

$$f(x) = \cos x$$

fulbringen de suchltu

yari

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

dr.

$$\left(\cos x - \cos a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \right. \quad \text{Adeleği:}$$

kullanılır

yukarıdaki yapıyı şöyle

Tanım: I bir aralık f I den tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f , I den her noktada sürekli ise f I den sürekli fonksiyondur.

f I aralığında her noktada sürekli ise f I den sürekli fonksiyondur. $c \in I$ olsun.

i) Eğer c I aralığının bir iç noktası ise f , $x=c$ de sürekli ise $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

ii) Eğer c , I aralığının sol uç noktası ise f , $x=c$ de sürekli ise $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$

iii) Eğer c , I aralığının sağ uç noktası ise f , $x=c$ de sürekli ise $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$

2) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ fonksiyonu $I = [1, 2)$ aralığında sürekli bir fonksiyondur.

$a \in I = [1, 2)$ alalım

$1 < a < 2$ in $a, I = [1, 2)$ aralığının bir iç noktası

$$\lim_{x \rightarrow a} \lfloor x \rfloor = 1 = \lfloor a \rfloor \rightarrow f(x) = \lfloor x \rfloor \text{ } x=a \text{ da sürekli}$$

$a=1$ in, $a=1$ $I = [1, 2)$ aralığının sol uç noktası

0 halde

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \lfloor x \rfloor = 1 = \lfloor 1 \rfloor \rightarrow f(x) = \lfloor x \rfloor \text{ } I = [1, 1) \text{ aralığında sürekli}$$

Ayrıca

ör) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ fonksiyonu $I = (1, 2]$ aralığında sürekli değildir.

$2 \in I = (1, 2]$ sağ uç noktası $2, I = (1, 2]$ aralığının

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \lfloor x \rfloor = 1 \neq \lfloor 2 \rfloor$$

Dolayısıyla $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $I = (1, 2]$
 aralığında sürekli değildir.

Örnek: f , I ve J aralıklarında sürekli
 ise $I \cup J$ de sürekli olmayabilir.

$$\text{ör) } f(x) = \lfloor x \rfloor \quad I = [1, 2) \quad \text{aralığında sürekli}$$

$$J = [2, 3) \quad \text{'' ''}$$

ancak $I \cup J = [1, 3)$ aralığında sürekli
 değildir!

$$2 \in I \cup J = \underline{[1, 3)} \quad \text{aralığın dışı olduğu için.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \lfloor x \rfloor \quad \text{limiti yok!}$$

$$\text{ör) } f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\underline{[0, +\infty)} \quad \text{aralığında } f(x) = x \quad \text{sürekli}$$

$$\underline{(-\infty, 0)} \quad \text{'' '' } f(x) = 1 \quad \text{sürekli}$$

Meah $f(x)$, $[0, +\infty) \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R}$ de
 sechti deil $\left(x=0 \text{ de sechti deil} \right)$