

Sonsuz Yanlı Limitler

Tanım: f fonksiyonu $x=a$ 'nın hemen sağında tanımlı (yani bir (a,b) aralığında tanımlı) bir fonksiyon olsun

Eğer bir (a,b) aralığı için

i) $f(x) > 0$ her $x \in (a,b)$ için

ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{f(x)} = 0$

koşulları sağlanıyorsa f fonksiyonu $x=a$ da $+\infty$ sağ limitine sahiptir denir

ve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ile gösterilir.

Bente şekilde

Tanım: Eğer bir (a,b) aralığı için

i) $f(x) < 0$ her $x \in (a,b)$

ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{f(x)} = 0$

koşulları sağlanıyorsa f fonksiyonu $x=a$ da $-\infty$ sağ limitine sahiptir denir
ve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ile gösterilir.

Berter tenmeker sol limit le ikin de
tanımlanabilir

İm:

Teorem: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \iff$

i) $f(x) > 0$ her $x \in (b, a)$
için
(bur (b, a) aralığı için)

ii) $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{f(x)} = 0$

Teorem: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \iff$

i) $f(x) < 0$ her $x \in (b, a)$
için
(bur (b, a) aralığı için)

ii) $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{f(x)} = 0$

ör) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+x^2-3}{\sqrt{2+x}+x}$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+x^2-3}{\sqrt{2+x}+x}$

limitleri hesaplayalım.

(5t:) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x+x^2-3}{\sqrt{2+x}+x} \right)$

$$\sqrt{2+x} + x = \frac{(\sqrt{2+x} + x)(\sqrt{2+x} - x)}{\sqrt{2+x} - x}$$

$$\frac{\sqrt{2+x} + x}{\frac{2+x-x^2}{\sqrt{2+x-x}}}$$

$x = -1$ için $\sqrt{2+x-x} = \sqrt{2+(-1)-(-1)} > 0$
 olduğundan -1 in ~~taner~~ sağda
 $\sqrt{2+x-x} > 0$ dir.

$x = -1$ için $2+x-x^2 = 0$ olduğundan
 $x = -1$ in ~~taner~~ solunda ve sağda
 işaretin belirlenmesi için

$$2+x-x^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$x = 2$$

		-1	2	2	
$2+x-x^2$	-	0	+	0	-

$x = -1$ in sağ yanında $2+x-x^2 > 0$

Doğrusu

$$\sqrt{2+x} + x = \frac{2+x-x^2}{\sqrt{2+x-x}} > 0 \left(\begin{array}{l} x = -1 \text{ in} \\ \text{bu say} \\ \text{ininde} \end{array} \right)$$

0 halde

$$(i) \quad f(x) = \frac{x+x^2-3}{\sqrt{2+x}+x} < 0 \quad x=-1 \text{ m s\u0131n\u0131r}$$

$$\left(\begin{array}{l} x=-1 \text{ m} \quad x+x^2-3 = -3 < 0 \text{ d\u0131\u015f\u0131} \\ x=-1 \text{ m} \text{ herer s\u0131n\u0131r e herer} \\ \text{s\u0131n\u0131r} \quad x+x^2-3 < 0 \end{array} \right)$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{2+x}+x}{x+x^2-3} = \frac{\sqrt{2+(-1)}+(-1)}{-1+(-1)^2-3} \\ = \frac{0}{-3} = 0$$

(i) ve (ii) b\u0131rlikte

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+x^2-3}{\sqrt{2+x}+x} = -\infty$$

B\u0131r s\u0131n\u0131r

$x=-1$ m s\u0131n\u0131r

$$\sqrt{2+x}+x = \frac{2+x-x^2}{\sqrt{2+x}-x} < 0$$

$x=-1$ m
bir s\u0131n\u0131r
(N\u0131r)

Döleyüyk v

$$i) f(x) = \frac{x+x^2-3}{\sqrt{2+x}-x} > 0$$

$x \rightarrow -1$ m sol
L'Hôpital

$$ii) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{2+x}-x}{x+x^2-3} = \frac{0}{-3} = 0$$

Döleyüyk

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+x^2-3}{\sqrt{2+x}-x} = +\infty \text{ olur.}$$

SONSUZDAKİ LİMİTLER

İstikildiz keder büyük (veya istikildiz
keder küçük) x sayıları için $f(x)$ fonksiyonun
eğilimini belirlemek

Tanım: $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ifadelerini
kullanacağız

Teorî: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = L$ olarak tanımlanır.

Beyaz selüloz

Teorî: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{t}\right) = L$ olarak tanımlanır.

Ör) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1} + x^3}$ Limiti hesaplayınız.

Çöz.) $f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1} + x^3}$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \sqrt{\frac{1}{t}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{t}-1} + \frac{1}{t^3}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{\sqrt{t}}}{\sqrt[3]{\frac{1-t}{t}} + \frac{1}{t^3}} \quad \frac{t^3}{t^3} \left(\text{Pay ve payda} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t + t^{5/2}}{\sqrt[3]{1-t} \cdot t^{3/2} + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

6 halde

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1} + x^3} = 0 \quad \text{dw.}$$

$$a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

olmak ise

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{Mittleri formulu}$$

Limit Kuralları (En çok kullanılan)

$$a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad L, M \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad \text{olmak}$$

ise

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \quad \text{olan}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L+M \\ \pm\infty \\ +\infty \\ -\infty \\ \text{belirsiz} \end{array} \right.$$

$L, M \in \mathbb{R}$ in

$L = \pm\infty, M \in \mathbb{R}$

$L \in \mathbb{R}, M = \pm\infty$

$L = +\infty, M = +\infty$

$L = -\infty, M = -\infty$

$L = +\infty, M = -\infty$

$M = +\infty, L = -\infty$

$$L = +\infty, M = -\infty \quad \text{ygn} \quad L = -\infty, M = +\infty$$

in $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ $\infty - \infty$ belirsizliği
derr.

$$2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} L \cdot M & L \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{R} \\ (-\infty) \cdot \infty & L = \pm\infty, M \in \mathbb{R} \\ (-\infty) \cdot \infty & L \in \mathbb{R}, M = \pm\infty \\ +\infty & L = \pm\infty, M = \pm\infty \\ -\infty & L = \pm\infty, M = \pm\infty \\ \text{belirsiz} & L = 0, M = \pm\infty \\ & L = \pm\infty, M = 0 \end{cases}$$

$$L = 0, M = \pm\infty \quad \text{ygn} \quad L = \pm\infty, M = 0$$

durumlarında

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) \text{ limiti belirsizdir}$$

bu belirsizliğe $0 \cdot \infty$ belirsizliği derr.

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{L}{M} & L, M \in \mathbb{R} \text{ u } M \neq 0 \\ \pm\infty \text{ ygn } -\infty & L \in \mathbb{R}, M = 0 \text{ in} \\ \text{den biri} & L = 0, M = \pm\infty \\ 0 & \text{Diğer durumlar} \\ \text{belirsiz} & \end{cases}$$

$L = +\infty$ veya $L = -\infty$ için, seçildi $M = +\infty$ ya da $M = -\infty$ in
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limiti belirsiz $\left(\frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği} \right)$
durur

$L = 0$, $M = 0$ in

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limiti belirsiz $\left(\frac{0}{0} \text{ belirsizliği} \right)$

$L = +\infty$ $M = 0$ in

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limiti belirsiz $\left(\frac{\infty}{0} \text{ belirsizliği} \right)$

Not:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ in

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ $+\infty$ veya $-\infty$

anılır

Bu şekilde olasılığı bulduk

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ $+\infty$ veya $-\infty$ da olur.

$$v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(-1)^{[x]} x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^{[x]} x \text{ geht!}$$

on each

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(-1)^{[x]} x} = 0$$