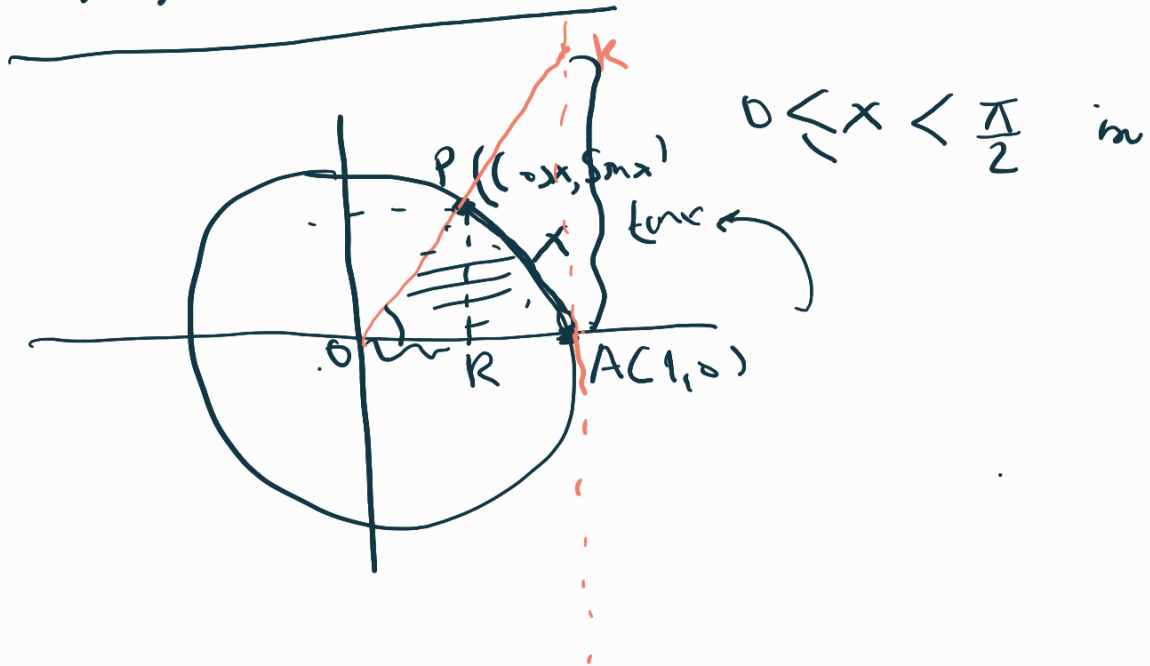


$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ limiti



$\triangle POR$ üçgeni $\leq \triangle POA$ $\triangle KDA$ üçgeni

$x \rightarrow 0$ in
eikil $\rightarrow 0$

3 alerdi birbiri

$$\frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x <$$

$$\frac{x}{2} < \frac{1}{2} \tan x$$

$\triangle POA$ derve dilerin $\rightarrow x$ ugnille $\rightarrow$
 π (derve aler) $\rightarrow 2\pi$
 Oruntide $\triangle POA$ derve dilerin aler $= \frac{x}{2}$

$$\frac{1}{2} \cos x \sin x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \tan x$$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ in}$$

her beide $\sin x > 0$ a. teilen ($x \neq 0$)

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Bunden

$$\left(\frac{1}{\cos x} \right) > \frac{\sin x}{x} > (\cos x)$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Sind

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0 \quad \text{also.}$$

$$0 < -x < \frac{\pi}{2} \quad \text{oder. 0 halbe}$$

$$\frac{1}{\cos(-x)} > \frac{\sin(-x)}{-x} > \cos(-x) \quad \text{da.}$$

$\frac{1}{\cos x}$

Darlegung

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x} \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0 \text{ de}$$

0 halde

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x} \quad x \in \overbrace{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}}^{\text{her}} \text{ de}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$ i hesaplayalım

$$\sqrt{1-x^2} < \cos x \leq 1$$

her $x \in \mathbb{R}$ için
(dikkatli bir şekilde)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} 1$$

0 halde Sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

Doktryna

$$\cos x \ll \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

for $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$ id:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

olup sileriz

teoremeind $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ekle edilir.

Teorem (limit için yeterli koşullar denenir):

i) $f(x) \neq b$ her $x \in I - \{a\}$ için a.s. $x \rightarrow a$ için b için I açık olması.

ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

iii) $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = L$

olsun Bu durumda

$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = L$ her $(yeni t = f(x))$ için
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{t \rightarrow b} t = b$
 $x \rightarrow a \Rightarrow t \rightarrow b$

o halde $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow b} g(t) = L$

$$8.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$$

$$t = 3x \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow t = 3x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$9.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \quad \text{limitni bulung}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{3}{3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \\ &= 3 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \right) = 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

$$10.) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{(1-x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$t = 1 - x$$

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow t = 1 - x \rightarrow 0$$

YANLI LİMITLER

Bazen f fonksiyonu $x=a$ nın sadece
 sağda (veya sadece solda) tanımlı olabilir.
 Bu durumda sadece f nın $x=a$ nın sağ (veya sol)
 (veya S_1 civarında) yaklaşımını S_2 edilebilir
 bu durum bize f nın $x=a$ da genli limit
 kavramına
 gster.

1) Sağ limit: f fonksiyonu $x=a$ na her ne
sahinde (belki $x=a$ hariç) tanımlı bir fonksiyon
olsun (yani b or (a,b) aralığında f tanımlı)
olsun

f fonksiyonu Sabit bir LER sayısına
 $x=a$ noktasında sürekli olarak f fonksiyonunun $x=a$ değeri
 olarak alınır. L sayısının f fonksiyonunun $x=a$ değeri
 sağ limiti olarak alınır.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad \text{ist gegeben.}$$

$x \rightarrow a$
 Böyle bir L sayısı yoksa f nm $x=a$ da
 sağ limiti yoktur dır.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \text{her } \varepsilon > 0 \text{ için } x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \text{ o.s.}$$

burada $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ m.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \text{her } \varepsilon > 0 \text{ için } 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

o.s. burda $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ m.

Benz. şekilde Sol limit tanımlanabilir

2) Sol limit: f fonksiyonu $x=a$ nın her ne şekilde tanımlı. bir fonksiyon olsun. Eger f fonksiyonu sabit bir $L \in \mathbb{R}$ sayısına $x=a$ nın solunda istediği kadar yakın olabilir ise f nın $x=a$ da ki Sol limiti L dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \text{ ile gösterilir}$$

ya da bir L sayısına göre f nın $x=a$ da Sol limiti yoktur, denir

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \text{her } \varepsilon > 0 \text{ için } x \in (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

o.s. burda $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ m.

yani:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$
v.r.

Örne: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

(v) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = ? \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = ?$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dolyayla

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}$

Örne: $x = a$ nun bir sağı yanında
 (yani: bir (a, b) aralığında) $f(x) = g(x)$

ve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = L$

Benzer şekilde

Örne: $x = a$ nun bir sol yanında (yani: bir (b, a) aralığında) $f(x) = g(x)$ ise

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = L$

$$8.) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \text{ in} \\ 2x+3 & x > 1 \text{ in} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = ? \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = ?$$

$$\text{Ans.)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x+3 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x+1 = 1+1 = 2$$

$$9.) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x \lfloor x \rfloor}{x+1} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x \lfloor x \rfloor}{x+1}$$

$$x \in \underbrace{(1, 2)}_{\substack{\text{2 nin hi} \\ \text{Sol avari}}} \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1 \Rightarrow \frac{x \lfloor x \rfloor}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

$$\text{o halde} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x \lfloor x \rfloor}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$$

ör)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x \lfloor x^2 \rfloor}{x+3} = ?$$

$$x \in (1.9, 2) \Rightarrow 1.9 < x < 2 \Rightarrow 3, \dots < x^2 < 4$$

2'nin
birisi
given

$$\Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 3 \Rightarrow \frac{x \lfloor x^2 \rfloor}{x+3} = \frac{3x}{x+3}$$

Ö halde $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x \lfloor x^2 \rfloor}{x+3} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x}{x+3} = \frac{3 \cdot 2}{2+3} = \frac{6}{5}$

limit kuralı, yuh limitler içinde

geçerlidir

$$(v) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = M \quad \text{in}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) + g(x) = L + M$$

gibi

Sikistime tesemi yuh limitlere ge
dönderebilir.

Teorem (Sağ limit in sikistime tesemi):

(her (a, b) için g için

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{für } x \in (a, b) \quad \text{mit}$$

also

$$\text{Eig.} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} h(x)$$

Is $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ auch?

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad \text{oder}$$

$$81) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \lfloor x \rfloor = ?$$

I. $y=0$

$$x \in (0, 1) \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow x \lfloor x \rfloor = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \lfloor x \rfloor = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

II. $y>0$ (Schrittweise decrease)

$$0 \leq x \lfloor x \rfloor \leq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x$$

$$\left(\begin{array}{l} x \in (0, 1) \\ \text{mit} \end{array} \right)$$

$$\text{Schrittweise decrease} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \lfloor x \rfloor = 0$$

57

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor x \rfloor$$

$$-x \leq x \lfloor x \rfloor \leq 0$$

$$(x \in (-\delta, 0))$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor x \rfloor = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \lfloor x \rfloor = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \lfloor x \rfloor$$

0 halch $\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor x \rfloor = 0$

SONSUZ LİMITLER

Tanım:

(belli
olun

f fonksiyonu $x=a$ nın civarında

$x=a$ hariç) tanımlı bir fonksiyon

Eğer $x=a$ ya, ϵ için bir δ bulunabilir,

i) $f(x) > 0$ her $x \in I - \{a\}$ için

ii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$

kosulları sağlayan m f fonksiyonu $x=a$ da $+\infty$ limitine sahiptir demektir

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ ile gösterilir.}$$

Birer şekilde

Teorem: f , $x=a$ nın civarında (belki $x=a$ hariç) tanımlı bir fonksiyon olsun

Eğer $x=a$ ya tam olarak bir I açık aralığı için

$$i) f(x) < 0 \quad \text{her } x \in I - \{a\}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

kosulları sağlayan m f fonksiyonu $x=a$ da $-\infty$ limitine sahiptir demektir

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ ile gösterilir.}$$

$$Ö) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$i) f(x) > 0 \quad \text{her } x \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ için}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$$

Dolugosyla $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

dw.

01) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$ o'dugun g'otiril.

$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$

(i) $f(x) = \frac{1}{|x|} > 0$ her $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uchun

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2} = 0$

o halda

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$