

1 Sorular

- 1) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x+8} = ?$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 - 4x + 1} = ?$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3} = ?$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 3} 5x - 7 = 8$ ($\varepsilon - \delta$) olduğunu gösteriniz.
- 5) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (ve a yakınında $\frac{f(x)}{g(x)}$ tanımlı ise)
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in var olamayacağını gösteriniz.
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ in var olmadığını gösteriniz.
- 7) $f(x) = \begin{matrix} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{matrix}$ $g(x) = \begin{matrix} 2 & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{matrix}$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ yı ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ yi bulunuz. $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = M$ oluyormu?
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0$ olduğunu $\varepsilon - \delta$ ile gösteriniz.
- 9) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{4x-2}}} = ?$
- 10) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ yok ama $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ var bir örneği $f(x) = x, g(x) = [x], a = 0$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ olduğunu $\varepsilon - \delta$ ile gösteriniz.

2 Çözümler

- 1) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x+8} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{x+2}}{(\sqrt[3]{x+2}-2)(\sqrt[3]{x^2-2}\sqrt[3]{x+4})} = \frac{1}{12}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 - 4x + 1 = 13$ (polinom) ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ise $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$
olduğundan $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 - 4x + 1} = \sqrt{13}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} \cdot \frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{2x+5}+3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5}+3}{(\sqrt{x+2}+2)2} = \frac{3}{2}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 3} 5x - 7 = 8$
 $\varepsilon > 0$ verilsin. $|x - 3| < \delta$ iken $|f(x) - 8| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulmalıyız.
 $|x - 3| < \delta \Rightarrow |5x - 7 - 8| = |5x - 15| = |5(x - 3)| = 5|x - 3| < 5\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{5} > 0$
- 5) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = M$ var olsaydı $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} g(x) = M \cdot 0 = 0 \Rightarrow L = 0$ olurdu
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = L$ olduğunu varsayalım.
 $\varepsilon = 1$ alalım. Limit tanımından $0 < |x - 0| < \delta$ iken $|\sin \frac{1}{x} - L| < 1$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. n yeterince büyük bir doğal sayı ise
 $x_1 = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ için $|x_1| < \delta$ olur. $|\sin \frac{1}{x_1} - L| = |1 - L| < 1 \Rightarrow 0 < L < 2$ olur.

$x_1 = \frac{2}{(4n+3)\pi}$ için $|x_2| < \delta$ olur. $\left| \sin \frac{1}{x_2} - L \right| = |-1 - L| < 1 \Rightarrow -2 < L < 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

7) $a = 1$ olsun. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ ve $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 = M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$ Fakat $g(L) = g(1) = 3$ yani $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) \neq g(L)$

8) $\varepsilon > 0$ verilsin. $|x - 0| < \delta$ iken $|f(x) - 0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulmalıyız. $|\sqrt[3]{x} - 0| = \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{\delta} = \varepsilon$, $\delta = \varepsilon^3$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{4x-2}}} = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{4x-2}}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} \cdot \frac{\sqrt[3]{(4x)^2+2}\sqrt[3]{4x+4}}{\sqrt[3]{(4x)^2+2}\sqrt[3]{4x+4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

10) $-1 < x < 1$ için $-1 \leq [x] < 1$ olup $0 < x[x] < [x]$ ($|x| = \sqrt{x^2}$) $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ Sandviç teoreminden $\lim_{x \rightarrow 0} x[x] = 0$ olur.

11) $\varepsilon > 0$ verilsin. $|x - 0| < \delta$ iken $|f(x) - 0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulmalıyız.

$$|x^2 - 0| = |x^2| = |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon. \delta = \sqrt{\varepsilon} \text{ alalım.}$$