

Çebirsel Fonksiyonların Limiti

Soru:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ olsun}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad (\sqrt{a} \text{ tanımlı i\u00e7in yani } a \geq 0 \text{ ise})$$

İspat: her $\varepsilon > 0$ için

$$0 < \underline{x-a} < \underline{\delta} \Rightarrow \underline{|\sqrt{x} - \sqrt{a}|} < \underline{\varepsilon} \quad \begin{array}{l} \text{0.5 } (\varepsilon \text{ na bağıl}) \\ \delta > 0 \text{ bulacağız.} \end{array}$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{a}| |\sqrt{x} + \sqrt{a}|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$\underline{|\sqrt{x} - \sqrt{a}|} = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} \leq \varepsilon$$

yani $\delta \leq \varepsilon \sqrt{a}$ alınabilir

Özel olarak $\delta = \varepsilon \sqrt{a}$
seçebiliriz

0 halde $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ elde edildi

Burada limit kurallarını uygulayarak

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \text{ olur } (\sqrt[n]{a} \text{ tanımlı i\u00e7in})$$

Hatta

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{a^n} \quad \left(\sqrt[n]{a^n} \text{ formülü} \right)$$

elde edilir

$$\text{ör) } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

Aslında biraz daha genel olarak
Sınırlama Saygınlığı:

Örnek: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ in $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$
olarak
($\sqrt[n]{L}$ formülü in)

$$\text{ör) } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5} = \sqrt[3]{2^2 + 2 \cdot 2 + 5} = \sqrt[3]{13}$$

$$\text{ör) } f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x \neq 2 \text{ in} \\ 5 & x = 2 \text{ in} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{f(x)} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 3) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

Ö laide $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{11}$ dir-

Önerme: $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $x=a$ 'ya
kime alın bir I aralık aralığında (belki $x=a$ hariç)
aynı değeri alıyorsa

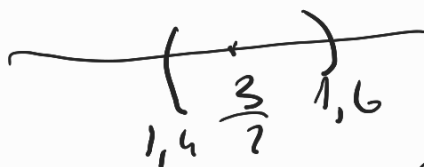
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

(yani $x \in I - \{a\}$ için $f(x) = g(x)$ diye ilk)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

Ö) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \lfloor x \rfloor$ limitini bulunuz

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ $g(x) = 1$



$x \in (1.4, 1.6) \Rightarrow f(x) = \lfloor x \rfloor = 1 = g(x)$

Ö Zaman $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} 1 = 1$

$$b) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

$$g(x) = x + 1 \text{ abzählbar}$$

$x \rightarrow 1$ in $\mathbb{R}$ $x = 1$ horiz $f(x) = g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \underline{x+1} = 2$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 3x+5 & x \neq 1 \text{ in} \\ 2 & x = 1 \text{ in} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3\underline{x}+5 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$$

Übersicht: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ $\vee$ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

in $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ Limiti yoktur.

İspat:

varsayalım ki

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ var olan

bu limiti M diyelim

yani

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = M$$

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \right) = \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \right)}_M \cdot \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)}_0$$

$$L = 0 \quad \text{Halbuki } L \neq 0 \text{ idi} \quad = 0$$

Dolayısıyla $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limiti yoktur

Teorî:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$\vee \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

in

denk.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limitine $\frac{0}{0}$ bağımsızlığı

Yeni bir durumda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limiti
hakkında genel bir kural bulamıyoruz.

Çözümler belirsizliklerde genellikle

$f(x)$ ve $g(x)$ ~~fonksiyonları~~
 $x=a$ da limiti 0 olan ortak
çarpıcı (veya çarpıcıları) olduğunda bu
belirsizlik meydana gelir

ör) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \frac{0}{0}$ belirsizliğidir

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 2$$

ör) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \quad \frac{0}{0}$ belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\cancel{\sqrt{x} - \sqrt{2}})(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x^2 + 2x + 4)}{\cancel{\sqrt{x} - \sqrt{2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x} + \sqrt{2})(x^2 + 2x + 4) = (\sqrt{2} + \sqrt{2})(2^2 + 2 \cdot 2 + 4) = 24\sqrt{2}$$

Teoremi: (Sıkıştırma kriteri): $x \rightarrow a$ ya göre
 olan bir I aralık aralığı olsun

$$\underline{g(x) \leq f(x) \leq h(x)} \quad \text{her } x \in \underline{I - \{a\}} \text{ için}$$

olsun Eger $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$

ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ olur.

ör) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ limitini bulunuz.

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \quad \text{he } x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ için}$$

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \underbrace{\left| \sin \frac{1}{x} \right|}_{\leq 1} \leq |x| \cdot 1 = |x| \quad \text{he } x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ için}$$

he $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$

($\text{Hesaplama: } |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$)

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x| \quad \text{he } x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$-\sqrt{x^2} \leq x \sin \frac{1}{x} \leq \sqrt{x^2} \quad \text{he } x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\sqrt{x^2} = -\sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2} = \sqrt{0} = 0 \quad 0 \text{ halde}$$

Sıkıştırma teoreminde

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \text{ olur.}$$