

LİMİT

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1 \quad \text{fonksiyonunu düşünelim}$$

bu fonksiyon $x=1$ de tanımlı değil

x	f(x)
0,9	1,9
0,95	1,95
0,98	1,98
1,1	2,1
1,01	2,01
1,015	2,015

görüldüğü gibi bu fonksiyon $x=1$ de tanımlı değil ancak

$x=1$ 'in civarında $f(x)$ değeri 2 civarında değer almaktadır

Yeni bu fonksiyon, $x=1$ civarında 2 olma eğilimindedir diyebiliriz
(sezgisel olarak)

Örneğin

$$f(x) = x \lfloor x \rfloor$$

tan sayılardan tanımlı bir fonksiyon

x	f(x)
2,1	4,2
2,01	4,02
2,001	4,002
1,9	1,9
1,95	1,95
1,98	1,98
1,995	1,995

bu fonksiyon $x=2$ civarında
sabit bir L sayısı olma
eğiliminde $\therefore$

Soru: bir $f(x)$ fonksiyonun $x=a$ civarında
bir LER eğiliminde olması ne anlama gelebilir?

$f(x)$ değerleri L sayısına, $x=a$ n.n
civarında ki sayılar için, istenildiği kadar
yakın olabiliyor ise f n.n $x=a$ civarında
eğilimi L dir dır.

$\varepsilon > 0$ her ne olursa olsun
 $f(x)$ değerleri: L sayısına ε sayısında
daha yakın yapabileceğiz ($x=a$ n.n civarında
sayılar için)

f n.n $x=a$ da ki eğilimi L dir $\Leftrightarrow$

her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

bulacağız öyle ki

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Tanım: f fonksiyon $x=a$ n.n civarında

(belki $x=a$ hariç) tanımlı bir fonksiyon
olsun. Eğer $f(x)$ değerleri sabit bir LER
sayısına $x=a$ n.n civarında istenildiği kadar
yakın olabiliyor ise f n.n $x=a$ da limiti L dir

deriv. Eğer bu şekilde bir L sayıya yakınsa
 f nın $x=a$ da limiti yoktur dır.

Gösterim: $L \in \mathbb{R}$ sayısı. f nın $x=a$ da
limiti ise

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ile gösterilir.

her $\varepsilon > 0$ için
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$
o.ş. bir $\delta > 0$ var

Ö) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $x \neq 1$ fonksiyonunun

$x=1$ deki limitinin 2 olduğunu
göstermek

her $\varepsilon > 0$ için

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon$$

o.ş. bir $\delta > 0$ (ε 'na bağlı) bulabiliriz

$$\left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| = |x+1-2| = |x-1| < \delta = \varepsilon$$

$\delta = \varepsilon$ alınır

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Teorem: f nin $x=a$ da limiti varsa
tekliktir.

Kanıt: varsayalım ki L_1 ve L_2
 f nin $x=a$ da iki farklı limiti olsun

Yani $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$
ve $L_1 \neq L_2$ olsun

$$0 < \underbrace{|L_1 - L_2|} = \varepsilon$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ olduğundan

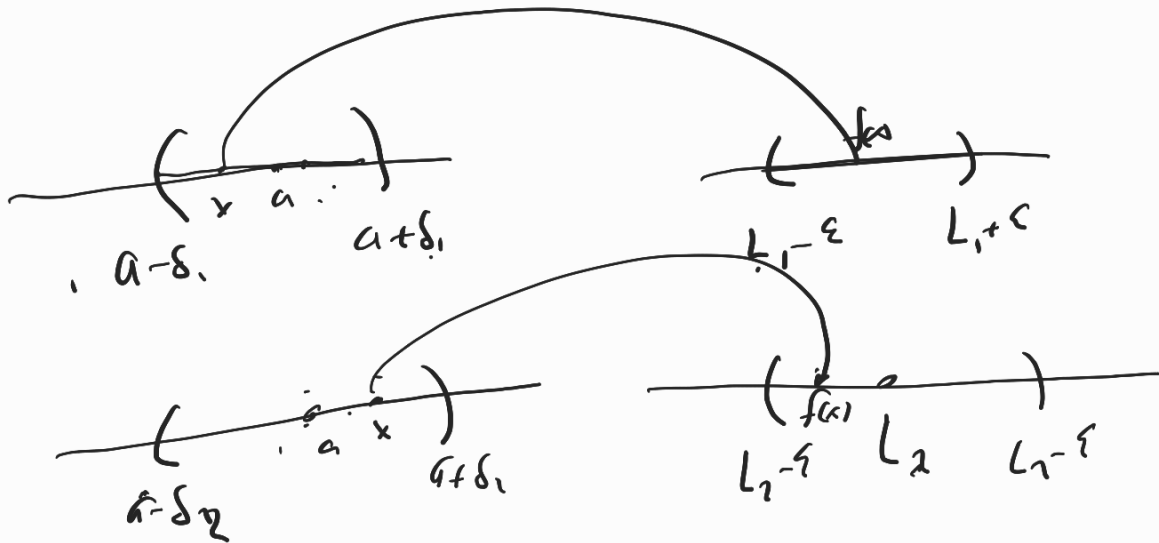
$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow \underbrace{|f(x) - L_1|} < \varepsilon = |L_1 - L_2| \text{ a\ss}$$

ki $\delta_1 > 0$ var.

Aynı şekilde

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ olduğundan

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon = L_1 - L_2 \quad \text{bzw. } \delta_1 > 0 \quad \text{oder}$$



$$\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \} > 0 \quad \text{allemal} \quad (f \rightarrow)$$

$$(a - \delta_1, a + \delta_1) \cap (a - \delta_2, a + \delta_2) = (a - \delta, a + \delta)$$

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon, \quad |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

$$x_0 \in (a - \delta, a + \delta) \quad \text{allemal}$$

$$0 < |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x_0) + f(x_0) - L_2|$$

$$< \underbrace{|f(x_0) - L_1|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f(x_0) - L_2|}_{< \varepsilon} < \varepsilon + \varepsilon = |L_1 - L_2| + |L_1 - L_2|$$

$$0 < |L_1 - L_2| < 2 \underbrace{|L_1 - L_2|} \quad \rightarrow \leftarrow$$

$$L_1 = L_2 \quad \text{allemal}$$

En basit Limitler

1) $f(x) = c$ sabit fonksiyon $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ var mıdır ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c \text{ dir.}$$

her $\varepsilon > 0$ için

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - c|}_{< \varepsilon} < \varepsilon \quad \text{0.5 bir } \delta > 0 \text{ bulacağız}$$

(δ ε 'in bağlı)

$\delta > 0$ her ne derseniz alalım
(örneğin $\delta = 1$ al)

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - c|}_{< \varepsilon} = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c \text{ dir.}$$

2) Özdeşlik fonksiyon

$f(x) = x$ özdeşlik fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ var mıdır ve

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

hw 870 12m

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x)-a|}_{x} < \varepsilon \quad \text{o.ş} \\ \text{bi } \delta > 0 \\ (\delta, \varepsilon \text{ 'ne bağlı}) \\ \text{bulacağız.}$$

$\delta = \varepsilon$ alınabilir. Geçerli.

$$0 < |x-a| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \underbrace{|f(x)-a|}_{x} = |x-a| < \varepsilon$$

Tanım: f fonksiyon $x=a$ nın civarında
(belli $x=a$ hariç) tanımlı bir fonksiyondur.
Eğer $f(x)$ değeri $x=a$ nın bir civarında
Sabit bir M sayısından mutlak değerce
küçük olursa ise f fonksiyon $x=a$ civarında
sınırlıdır denir.

$$f, x=a \text{ civarında sınırlıdır} \Leftrightarrow x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\} \\ \Rightarrow |f(x)| < M \\ \text{o.ş sabit bir } M > 0 \\ \text{ve } \delta > 0 \text{ v.v.}$$

Teorem: f fonksiyonunun $x=a$ da limitinin
var olması ile f nın $x=a$ civarında
sınırlı olması gerekir.

İspat: Eger f nm $x=a$ da limiti var ise
 $\lim_{x \rightarrow a}$ civarında sınırlı olduğunu göstermeli:
 İstereceğiz:

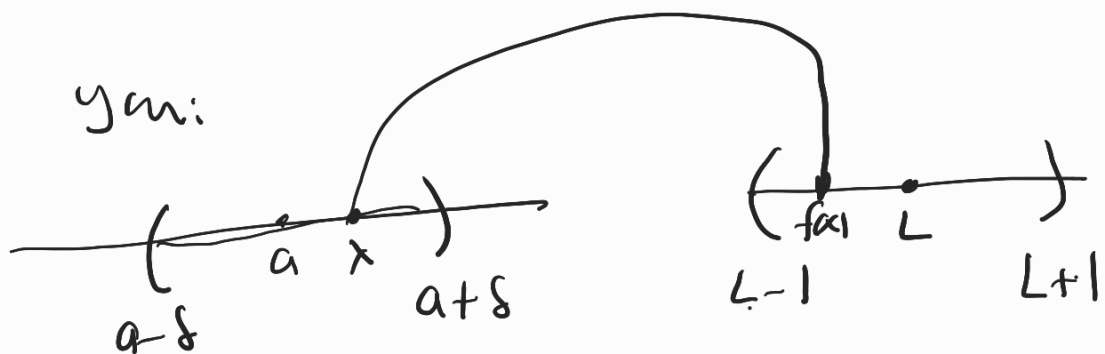
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ olsun.}$$

0 her $\epsilon > 0$ için

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon \text{ o.s. } (\epsilon \text{ na bağılı}) \text{ br } \delta > 0 \text{ var}$$

$$\underline{\epsilon = 1 \text{ alırsak}}$$

$$\underline{0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < 1} \text{ o.s. br } f \text{ var.}$$



$$x \in \underline{(a-\delta, a+\delta) - \{a\}} \Rightarrow |f(x)| < |L|+1 = M$$

Dolayısıyla f $x=a$ civarında sınırlıdır.

0,)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \text{ in} \\ 2 & x = 0 \text{ 'ne} \end{cases}$$

fonksiyonun $x=0$ da limiti yoktur.

x	$f(x)$
0,1	10
0,01	100
0,0001	10000
0,00000001	100000000
-0,000001	-10000000

$f(x)$ değeri:

$x=0$ in civarında
İstendiği kadar
büyük (ve istendiği
kadar küçük) değerler
alınabilmektedir

$f(x)$ $x=0$ civarında
Sınırlı değildir.

Dolayısıyla $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ yoktur.

Limit, + Kuralları

$$1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \quad \text{ise}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M \quad \text{olur.}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \quad \text{ise}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M \quad \text{d.w.}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \quad \text{ve } M \neq 0$$

$$\text{De} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{d.w.}$$

Bir uygulama:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ bir polinom fonksiyon olsun

$$\lim_{x \rightarrow c} a_0 = a_0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} a_1 x = \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow c} a_1 \right)}_{= a_1} \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow c} x \right)}_c$$

$$\lim_{x \rightarrow c} a_2 x^2 = \left(\lim_{x \rightarrow c} a_2 \right) \left(\lim_{x \rightarrow c} x^2 \right)$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow c} a_2 \right) \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow c} x \right)}_c \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow c} x \right)}_c$$

$$= a_2 c \cdot c = a_2 c^2$$

$$\lim_{x \rightarrow c} a_n x^n = a_n c^n \quad \text{Dokuzgök}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = \lim_{x \rightarrow c} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0)$$

$$= a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0 = P(c)$$

$$01) \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 2x^2 + 5) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 5 = 21$$

Bu başka uygulama:

$$f(x) = \frac{P(x)}{q(x)} \quad \left(P(x) \text{ ve } q(x) \text{ sadece } x \text{ i\u00e7in polinom} \right)$$

b, f(x) için bir rasyonel fonksiyon
durur

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} P(x)}{\lim_{x \rightarrow c} q(x)}$$

$$= \frac{P(c)}{q(c)} = f(c) \quad \left(\lim_{x \rightarrow c} q(x) \neq 0 \text{ in } (q(c) \neq 0 \text{ in}) \right)$$

0 halinde rasyonel fonksiyonların
tanımlı oldukları tüm noktalarda limiti
vada 0 noktasında değere eşitir.