Bölüm 10 Alıştırma 16 nın Biraz Daha Genel Şeklinin Çözümü

Soru: Bir $\varepsilon > 0$ verilsin. $\sqrt{5}$ sayısını ε dan daha az bir hata ile yaklaşık hesaplayınız.

Çözüm: $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ açık aralığında, istendiği kadar (sonsuz kez) türevlenebilirdir. Dolayısıyla Kalanlı Taylor Teoreminden, her $n \in \mathbb{N}$ için, $a = 4$, $b = 5$ alındığında, (n ye bağlı bir $c \in (4,5)$ için)

$$\sqrt{5} = f(5) = P_n(5) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(5-4)^{n+1} = P_n(2) + R_n$$

olur. $n \geq 2$ için $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n}x^{\frac{1}{2}-n}$ bulunur. Dolayısıyla ($n \geq 1$ iken bir $c \in (4,5)$ için)

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(n+1)!2^{n+1}c^{n+\frac{1}{2}}}$$

olur. $2^{n+1}(n+1)! = 2\cdot 4\cdots(2n+2)$ ve $4 < c < 5$ olduğundan $2^{2n+1} < c^{n+\frac{1}{2}} < 5^{n+\frac{1}{2}}$ nin sonucu olarak

$$|R_n| < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(n+1)!2^{n+1}2^{2n+1}} = \frac{1}{2^{2n+1}}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{(2n-1)}{2n}\frac{1}{2n+2} \leq \frac{1}{(n+1)2^{2n+3}} \leq \frac{1}{2^{2n+4}} = \frac{1}{4^{n+2}}$$

olur. Dolayısıyla $\frac{1}{4^{n+2}} \leq \varepsilon$ (eşdeğer olarak $n \geq \log_4 \frac{1}{\varepsilon} - 2$) koşulunu sağlayan herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için ($\sqrt{5} \approx P_n(5)$ yaklaşık eşitliğinde) Hata$= |R_n| < \varepsilon$ olur.

Örneğin $\varepsilon = 10^{-5}$ için $n \geq 7$ ($\frac{1}{(n+1)2^{2n+3}} \leq \varepsilon$ eşitsizliğine bakarak $n \geq 6$) almak yeterli olacaktır.

$P_6(x) = 2 + \frac{(x-4)}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512} - \frac{5(x-4)^4}{16384} + \frac{7(x-4)^5}{131072} - \frac{21(x-4)^6}{2097152}$

olduğundan, 10^{-5} den az bir hata ile

$\sqrt{5} \approx 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{512} - \frac{5}{16384} + \frac{7}{131072} - \frac{21}{2097152}$